Gabarito da Lista de Interpolação e Método dos Mínimos Quadrados

Exercício 1:

(a) $f(x) = cos(x)$

Primeira forma: Interpolação de Lagrange

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

onde **:**

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \Rightarrow L_0(0{,}45) = \frac{(0{,}45-0{,}6)(0{,}45-0{,}9)}{(0-0{,}6)(0-0{,}9)} = 0{,}125 \;;\; f(0) = cos(0) = 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \Rightarrow L_1(0{,}45) = \frac{(0{,}45-0)(0{,}45-0{,}9)}{(0{,}6-0)(0{,}6-0{,}9)} = 1{,}125 \;;\; f(0{,}6) = cos(0{,}6) \approx 0{,}825$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \Rightarrow L_2(0{,}45) = \frac{(0{,}45-0)(0{,}45-0{,}6)}{(0{,}9-0)(0{,}9-0{,}6)} = -0{,}25 \;;\; f(0{,}9) = cos(0{,}9) \approx 0{,}622$$

Portanto,

$$\boldsymbol{f(0{,}45) \approx P_2(0{,}45) = 0{,}125 \cdot 1 + 1{,}125 \cdot 0{,}825 - 0{,}25 \cdot 0{,}622 = 0{,}897625}$$

Erro :

$$\boldsymbol{|f(x) - P_2(x)| = |cos(0{,}45) - P_2(0{,}45)| \approx 2{,}822 \cdot 10^{-3}}$$

Segunda forma: Diferenças Divididas de Newton

$$P_2(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1)$$

onde **:**

$$d_0 = f[x_0]$$

$$d_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$d_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Vamos montar a seguinte tabela:

x	dd0	dd1	dd2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 1 = d_0$		
		$\boldsymbol{f[x_0, x_1] = -0{,}292 = d_1}$	
$x_1 = 0{,}6$	$f[x_1] = 0{,}825$		$\boldsymbol{f[x_0, x_1, x_2] = -0{,}428 = d_2}$
		$f[x_1, x_2] = -0{,}677$	
$x_2 = 0{,}9$	$f[x_2] = 0{,}622$		

$$\boldsymbol{P_2(0{,}45) = 1 + (-0{,}292)(0{,}45 - 0) + (-0{,}428)(0{,}45 - 0)(0{,}45 - 0{,}6) = 0{,}89749}$$

Exercício 2:

Cota Superior do Erro:

$$\left|\boldsymbol{E_n(x)}\right| = \left|\boldsymbol{f(x) - P_n(x)}\right| \le \frac{\boldsymbol{M_{n+1}}}{\boldsymbol{(n+1)!}}\left|\boldsymbol{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)}\right|$$

onde :

$$\boldsymbol{M_{n+1} = \text{máx}\left|f^{(n+1)}(x)\right| \text{ para } x \in [x_0, x_n]}$$

Então,

$$\left|E_2(x)\right| = \left|f(x) - P_2(x)\right| \le \frac{\left|f'''(x)\right|_{\text{máx}}}{3!}\left|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\right|$$

$$f(x) = \cos(x) \;\Rightarrow\; f'''(x) = \text{sen}(x)$$

$$f'''(0) = 0\,;\; f'''(0{,}6) \approx 0{,}565\,;\; \underbrace{f'''(0{,}9) \approx 0{,}7833}_{\text{Máximo}}$$

$$\boldsymbol{\left|E_2(0{,}45)\right| \le \frac{0{,}7833}{3!}\left|(0{,}45 - 0)(0{,}45 - 0{,}6)(0{,}45 - 0{,}9)\right| \approx 3{,}965 \cdot 10^{-3}}$$

Exercício 3:

(a) Devemos neste item construir por Lagrange $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ tais que:

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

onde :

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,;\; L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,;\; \text{com } x_0 = 0{,}83 \text{ e } x_1 = 0{,}86$$

$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$
onde :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \; ; L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \; ; L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

com $x_0 = 0{,}83$, $x_1 = 0{,}86$ e $x_2 = 0{,}87$ (lembrando que escolhemos para x_0 o valor mais próximo de x)

$P_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$
onde :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \; ; L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \; ; L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

com $x_0 = 0{,}81$, $x_1 = 0{,}83$, $x_2 = 0{,}86$ e $x_3 = 0{,}87$

(b) Usando Diferenças Divididas de Newton:

Devemos neste item construir $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ tais que:

$$P_1(x) = d_0 + d_1(x-x_0)$$

$$P_2(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$P_3(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + d_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

e usar tabelas como usamos no exercício 1.

(c) Se a função f(x) é dada na forma de tabela, o valor absoluto do erro $|E_n(x)|$ só pode ser estimado. Isto porque, neste caso, não é possível calcular M_{n+1}; mas, se construirmos a tabela de diferenças divididas até ordem n+1, podemos usar o maior valor (em módulo) destas diferenças como uma aproximação para $\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ no intervalo $[x_0 , x_n]$.

Neste caso, dizemos que:

$$|E_n(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \cdot \left(\text{máx}|\text{diferenças divididas de ordem } n+1|\right)$$

Então, neste exercício:

$$|E_1(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)| \cdot \left(\text{máx}|dd\ 2|\right)$$

$$|E_2(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \cdot \left(\text{máx}|dd\ 3|\right)$$

$$|E_3(x)| \approx |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)| \cdot \left(\text{máx}|dd\ 4|\right)$$

Pela tabela:

x	dd0	dd1	dd2	dd3
0,81	16,94410			
		31,041		
0,83	17,56492		6 = máx|dd2|	
		31,341		-2,0873
0,86	18,50515		5,875	
		31,576		
0,87	18,82091			

Assim,

$$|E_1(0{,}84)| \approx |(0{,}84-0{,}83)(0{,}84-0{,}86)| \cdot (6) = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$$

$$|E_2(0{,}84)| \approx |(0{,}84-0{,}83)(0{,}84-0{,}86)(0{,}84-0{,}87)| \cdot (|-2{,}0833|) = 1{,}24998 \cdot 10^{-5}$$

Não é possível determinar $|E_3(x)|$ porque não temos as diferenças divididas de ordem 4.

Exercício 4:

Neste exercício, temos pontos x_i igualmente espaçados. Sendo h o passo, temos:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

Cota superior para o erro na interpolação linear:

$$|E_1(x)| = |f(x) - P_1(x)| \le \frac{|f''(x)|_{máx}}{2!} |(x-x_0)(x-x_1)|$$

Também são dados do exercício : $|f''(x)| \le M;\ x_0 = x_i;\ x_1 = x_{i+1}$

Para achar $|(x-x_i)(x-x_{i+1})|_{máx}$, *basta verificarmos que como se trata de uma parábola, a coordenada que contém o valor máximo para* $w(x) = (x-x_i)(x-x_{i+1})$ *é* $(x_{vértice}, y_{vértice}) = \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, y_{vértice}\right)$

Então,

$$|E_1(x)| \le \frac{M}{2!}\left|\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2} - x_i\right)\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2} - x_{i+1}\right)\right| = \frac{M}{2}\left|\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\left(\frac{x_i-x_{i+1}}{2}\right)\right| = \frac{M}{2}\frac{\overbrace{|x_{i+1}-x_i|}^{h}}{2}\frac{\overbrace{|x_i-x_{i+1}|}^{h}}{2} = \frac{Mh^2}{8}$$

Exercício 5:

Aplicar o resultado do exercício anterior.
Também é válido aqui o seguinte corolário para o Teorema do Erro:

Para pontos igualmente espaçados, ou seja: $\boldsymbol{x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h}$
onde h é o passo, temos:

$$\boldsymbol{|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| < \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}}$$

Exercício 6:

(a) Vamos ordenar a tabela por peso:

Altura(cm)	163	173	178	183	188
Peso (Kg)	63	69	73	79	82

Usando $P_2(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1)$, temos:

x	dd0	dd1	dd2	dd3	dd4
63	163				
		5/3			
69 = x_0	173 = d_0		-1/24		
		5/4 = d_1		0	
73 = x_1	178		-1/24 = d_2		29/53352
		5/6		29/2808 = máx|dd3|	
79 = x_2	183		5/54		
		5/3			
82	188				

$$\boldsymbol{P_2(70) = 173 + \frac{5}{4}(70 - 69) - \frac{1}{24}(70 - 69)(70 - 73) = 174{,}375\ cm}$$

(b) Estimativa do erro:

$$\boldsymbol{|E_2(70)| \approx |(70 - 69)(70 - 73)(70 - 79)| \cdot (|29 / 2808|) \approx 0{,}27885}$$

(c) A curva que aproximaremos para os pontos da tabela é da forma:

$$\boldsymbol{\psi(x) = \alpha\ sen(x) + \beta\ cos(x)}$$

Vamos ajustá-la aos dados da tabela através do Método dos Mínimos Quadrados, fazendo:

$$S(\alpha\ ,\ \beta) = \sum_{i=0}^{4} [f(x_i) - \alpha\ sen(x_i) - \beta\ cos(x_i)\ ]^2$$

onde :

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=0}^{4} [f(x_i) - \alpha\ sen(x_i) - \beta\ cos(x_i)\ ] \cdot [-sen(x_i)\ ] = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=0}^{4} [f(x_i) - \alpha\ sen(x_i) - \beta\ cos(x_i)\ ] \cdot [-cos(x_i)\ ] = 0 \quad (2)$$

Rearrumando (1) e (2), temos :

$$2\alpha\sum_{i=0}^{4} sen^2(x_i) + \beta\sum_{i=0}^{4} sen(2x_i) = 2\sum_{i=0}^{4} f(x_i) sen(x_i) \qquad (3)$$

$$\alpha\sum_{i=0}^{4} sen(2x_i) + 2\beta\sum_{i=0}^{4} \mathbf{cos}^2(x_i) = 2\sum_{i=0}^{4} f(x_i)\mathbf{cos}(x_i) \quad (4)$$

Formamos a seguinte tabela:

x	y = f(x)	sen²(x)	cos²(x)	sen(2x)	ysen(x)	ycos(x)
79	183	0,964	0,036	0,375	179,638	34,918
69	173	0,872	0,128	0,669	161,509	61,998
82	188	0,981	0,019	0,276	186,170	26,165
63	163	0,794	0,206	0,809	145,234	74,000
73	178	0,915	0,085	0,559	170,222	52,042
	SOMAS	4,526	0,474	2,688	842,773	249,123

Assim, temos o sistema:

$$9{,}052\alpha + 2{,}688\beta = 1685{,}546$$
$$2{,}688\alpha + 0{,}948\beta = 498{,}246$$

Resolvendo esse sistema, achamos :

$$\alpha \approx 190{,}717$$
$$\beta \approx -15{,}187$$

Portanto, a melhor função que ajusta estes pontos é :

$$\psi(x) = 190{,}717\ sen(x) - 15{,}187\ cos(x)$$

Agora, vamos usar essa equação para achar a altura aproximada de uma pessoa de 70 Kg :

$$\psi(70) = 190{,}717\ sen(70^{º}) - 15{,}187\ cos(70^{º}) \approx 174{,}021\ cm$$

Exercício 10:

Dados :

$(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, m$ (Tabela de f)

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ (Funções quaisquer contínuas)

Determinar uma função do tipo :

$g(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$

onde $c_i \in R$, $i = 0, 1, \ldots, n$

que se ajuste à tabela dada por $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, m$

A idéia mais ingênua e natural que nos ocorre para ajustar g à f é impormos a condição de que g coincida com f nos pontos dados; ou seja, $g(x_i) = f(x_i)$, i = 0,1,..., m.

Teríamos então:

$$\begin{cases} c_0\varphi_0(x_0) + c_1\varphi_1(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n(x_0) = f(x_0) \\ c_0\varphi_0(x_1) + c_1\varphi_1(x_1) + \ldots + c_n\varphi_n(x_1) = f(x_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_0\varphi_0(x_m) + c_1\varphi_1(x_m) + \ldots + c_n\varphi_n(x_m) = f(x_m) \end{cases}$$

que é um sistema de $m+1$ equações e $n+1$ incógnitas $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

(a) Quando $m = n$, $\varphi_i(x) = x^i$ e os pontos x_i's são distintos teremos um problema de INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL
(b) Quando m > n teremos um sistema com mais equações do que incógnitas e um dos métodos mais usados neste caso é o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS (MMQ).

É possível obter um mesmo polinômio que interpola e faz o ajuste de curvas pelo MMQ se o modelo ajustar exatamente os dados. Dessa forma, o mínimo de $S(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - g(x_k)]^2$ será zero e, portanto, a interpolação é um caso especial dentro do MMQ.

Exercício 13:

Por ordem de peso, a tabela fica:

Peso(Kg)	63	69	73	79	82
Altura(cm)	163	173	178	183	188
Velocidade(km/h)	14	16	15	15	14

O exercício pede para usar um polinômio bidimensional de grau 2. Então:

$$\begin{aligned} P_2(x,y) = {} & f(x_0,y_0)L_0(x)L_0(y) + f(x_0,y_1)L_0(x)L_1(y) + f(x_0,y_2)L_0(x)L_2(y) + \\ & f(x_1,y_0)L_1(x)L_0(y) + f(x_1,y_1)L_1(x)L_1(y) + f(x_1,y_2)L_1(x)L_2(y) + \\ & f(x_2,y_0)L_2(x)L_0(y) + f(x_2,y_1)L_2(x)L_1(y) + f(x_2,y_2)L_2(x)L_2(y) \end{aligned}$$

Para a variável x : $x_0 = 73, x_1 = 79, x_2 = 82$

$L_0(75) = 14/27$; $L_1(75) = 7/9$; $L_2(75) = -8/27$

$Para\ a\ variável\ y:\ y_0 = 73, y_1 = 79, y_2 = 82$

$L_0(175) = 12/25\ ;\ L_1(175) = 16/25\ ;\ L_2(175) = -3/25$

Então, fazendo agora $L_{ij}(x,y) = L_i(x)L_j(y)$, temos :

$L_{00}(75,175) = 56/225,\ f(x_0, y_0) = 16$
$L_{01}(75,175) = 224/675,\ f(x_0, y_1) = 15$
$L_{02}(75,175) = -14/225,\ f(x_0, y_2) = 15$
$L_{10}(75,175) = 28/75,\ f(x_1, y_0) = 16$
$L_{11}(75,175) = 112/225,\ f(x_1, y_1) = 15$
$L_{12}(75,175) = -21/225,\ f(x_1, y_2) = 15$
$L_{20}(75,175) = -32/225,\ f(x_2, y_0) = 16$
$L_{21}(75,175) = -128/675,\ f(x_2, y_1) = 15$
$L_{22}(75,175) = 8/225,\ f(x_2, y_2) = 15$

Observação: na hora de calcular $f(x_i, y_j)$, colocamos x_i como ponto fixo (que não varia). Depois, verificamos o valor de $f(x_i, y_j)$, a velocidade representada neste exercício, no ponto y_j.

Portanto,

$$P_2(75,175) = 16 \cdot \frac{56}{225} + 15 \cdot \frac{224}{675} + 15 \cdot -\frac{14}{225} + 16 \cdot \frac{28}{75} + 15 \cdot \frac{112}{225} + 15 \cdot -\frac{21}{225} + 16 \cdot -\frac{32}{225} + 15 \cdot -\frac{128}{675} + $$
$$+\ 15 \cdot \frac{8}{225} = 15{,}48\ km/h.$$