Exercícios de Cálculo Numérico - Erros

1. Considere um computador de 14 bits com expoente máximo $e = (15)$ e a representação em aritmética flutuante na base 2.

   (a) Determine o menor número positivo representável nesta máquina, na base 10.

   (b) Determine o maior número positivo representável nesta máquina, na base 10.

   (c) Represente o número $x = (12, 37)$ nesta máquina e calcule o erro da representação na base 10.

   (d) Determine o menor valor de ϵ tal que $12, 37 + \epsilon \; > \; 12, 37$.

2. Numa calculadora aproxima-se o valor de e^x, para todo $x \in [-1, 1]$, pelo valor do polinômio de Taylor de grau 3, obtido através da expansão de e^x em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$.

   (a) Qual a aproximação de $e^{0.5}$ fornecida pela calculadora?

   (b) Utilizando a expressão do erro cometido ao se aproximar a função e^x pela sua expansão em série de Taylor, forneça um limitante superior para o erro cometido no item (a).

3. Usando a série de Taylor, determine o valor aproximado e o limitante superior do erro, utilizando 4 dígitos significativos, para o cálculo de sen$(47°)$, em torno do ponto $x_0 = (45°)$, com polinômios de grau

   (a) $\eta = 2$

   (b) $\eta = 3$

   (c) Usando o polinômio de grau $\eta = 2$ e o erro associado, calcule $\displaystyle\int_0^{47°} \text{sen}(x)\, dx$, sabendo que o valor "exato" é $I = 0.318001639$

4. Considere a integral abaixo:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

   Fazendo uso da integral por partes obtém-se a recorrência:

$$I_n = 1 - nI_{n-1} \; ; \quad n = 2, 3, ... \tag{1}$$

   (a) Calcule o valor de I_{100}, usando (1), para $n = 2, 3, ..., 100$, sabendo que $I_1 = 1/e$.

   (b) Calcule o valor de I_{100}, usando $I_{n-1} = \dfrac{(1 - I_n)}{n}$, para $n = 200, 199, ..., 101$, utilizando a aproximação $I_{200} \approx 1/201$.

   (c) Sabendo-se que $0 \leq I_n \leq 1/(n+1)$, compare os dois resultados e verifique em qual deles o erro é maior. Qual é a melhor maneira de calcular? Justifique a resposta.

5. Considere a série Harmônica dada por $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Mostra-se que $S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$ e portanto é divergente. No entanto, se calcularmos S, usando o algoritmo: $S_1 = 1$ e $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{k+1}, \quad k \geq 1$, obtemos um resultado finito. Explique o que ocorre.

6. Verifica-se que a série de Taylor da função e^x em torno de $x_0 = 0$ é:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{2}$$

As somas parciais $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ podem ser usadas para calcular aproximações para o valor de e^{-5} de dois modos:

(a) Tomando $x = -5$ em (2);

(b) Tomando $x = 5$ em (2) e lembrando que $e^{-5} = 1/e^5$;

(c) Compare estes dois procedimentos com $n = 100$. Compare também seus resultados com o valor de e^{-5} da calculadora.