Exercícios de Cálculo Numérico
Equações Diferenciais Ordinárias

1. Determine a solução numérica aproximada da seguinte Equação Diferencial Ordinária, com o passo $h = 0.2$:

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 0 & \forall x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Método de Euler (Método das Tangentes)

   (b) Método de Euler Aperfeiçoado

   (c) Método de Runge-Kutta de 4° ordem.

   (d) Método de Predição-Correção de 4° ordem.

   (e) Sabendo-se que a solução exata da equação é $y(x) = e^{-2x}$, compare com as soluções aproximadas obtidas nos items anteriores.

2. Considere a equação diferencial ordinária, dada por:

$$\begin{cases} xy'(x) - x^2 y(x) - 2 = 0 & \forall x \in [1, 2] \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

   Fazendo $h = 0.1$, determine a solução aproximada no ponto $x = 1.5$, usando o método de Euler Aperfeiçoado.

3. Determine a solução numérica aproximada da seguinte Equação Diferencial Ordinária, de segunda ordem, com o passo $h = 0.2$:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 & \forall x \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$$

   (a) Método de Euler (Método das Tangentes)

   (b) Método de Euler Aperfeiçoado

   (c) Sabendo-se que a solução exata da equação é $y(x) = (1/\pi^2)\ \text{sen}(\pi x)$, compare com as soluções aproximadas obtidas nos items anteriores.

4. Um corpo com massa inicial de $200Kg$ está em movimento sob a ação de uma força constante de $2000N$. Sabendo-se que esse corpo está perdendo $1Kg$ de sua massa por segundo e considerando que a resistência do ar é o dobro de sua velocidade e que o corpo está em repouso no instante $t = 0$, então a EDO que descreve a variação de sua velocidade é dada por

$$\begin{cases} v'(t) = \dfrac{2000 - 2v(t)}{200 - t} & \forall t > 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

   Determine a velocidade do corpo $v(t)$ no instante $t = 5$ segundos com intervalos de 0.5 segundos, usando:

(a) Método de Euler Aperfeiçoado

(b) Método de Runge-Kutta de 4° ordem.

(c) Método de Predição-Correção de 4° ordem.

(d) Sabendo-se que a solução exata da equação é $v(t) = 10\,t - \dfrac{1}{40}t^2$, compare com a solução aproximada obtida nos items anteriores.

5. Na teoria da propagação de doenças contagiosas, podemos utilizar uma equação diferencial para predizer o número de indivíduos da população infectado em um dado tempo, supondo algumas simplificações adequadas. Em particular, suponha que todos os indivíduos de uma população fixa tenham a mesma probabilidade de se infectar e que, uma vez infectado, permaneçam neste estado. Vamos denotar por $x(t)$ o número de indivíduos vulneráveis no tempo t e com $y(t)$ o número de infectados. Podemos supor, que a taxa na qual o número de infectados muda seja proporcional ao produto de $x(t)$ e $y(t)$, já que a taxa depende do número de indivíduos infectados e do número de indivíduos vulneráveis que existem nesse tempo. Se a população é suficientemente numerosa para supormos que $x(t)$ e $y(t)$ sejam variáveis contínuas, podemos expressar o problema como:

$$y'(t) = k\; x(t)\; y(t)$$

onde k é uma constante e $x(t) + y(t) = m$ é a população total. Podemos reescrever essa equação, para que contenha apenas $y(t)$, na forma,

$$y'(t) = k\;(m - y(t))\; y(t) \qquad \text{"Equação de Bernoulli"}$$

Supondo que $m = 100.000,\quad y(0) = 1000,\quad k = 2 \times 10^{-6}$ e que o tempo seja medido em dias, encontre uma aproximação para o número de infectados ao final de 30 dias.

(a) Método de Runge-Kutta de 4° ordem.

(b) Método de Predição-Correção de 4° ordem.

6. **Problema Presa-Predador (Lotka & Volterra)** Considere o problema de predição da população de duas espécies, sendo uma delas a presa e a outra predadora, cuja população no tempo t é dado por $x(t)$ e $y(t)$. Suponha que a presa sempre disponha de comida suficiente e que sua taxa da natalidade seja proporcional à quantidade de presas vivas nesse tempo, ou seja, a taxa de natalidade é $c_1x(t)$. A taxa de mortalidade da presa depende do número de presas e de predadores vivos nesse tempo, que podemos supor, na forma $c_2x(t)y(t)$. Por outro lado, a taxa de natalidade do predador depende de sua disponibilidade de comida $x(t)$ e, também, do número de predadores disponíveis para processo de reprodução. Por tal razão, suponha que a taxa de natalidade dos predadores seja $c_3x(t)y(t)$. Suponha que sua taxa de mortalidade seja proporcional à quantidade de predadores vivos no tempo, ou seja, que a taxa de mortalidade dos predadores seja $c_4y(t)$. Dado que $x'(t)$ e $y'(t)$ representam, a alteração nas populações de presas e predadores no tempo, o problema se

expressa por meio do sistema acoplado de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} x'(t) = c_1\ x(t) - c_2\ x(t)y(t) \\ y'(t) = c_3\ x(t)y(t) - c_4\ y(t) \\ x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Resolva esse sistema para $0 \leq t \leq 4$, usando o método de Runge-Kutta de 4° ordem, supondo que $x_0 = 1000$, $y_0 = 500$, $c_1 = 3$, $c_2 = 0.002$, $c_3 = 0.0006$, $c_4 = 0.5$. Faça o gráfico das soluções encontradas, registrando ambas as populações em função do tempo, e descreva os fenômenos físicos encontrados.**Sugestão** O sistema pode ser resolvido simultaneamente ou determina-se primeiro o número de presas $x(t_1)$ em $(1)_1$, depois $y(t_1)$ em $(1)_2$, usando $x(t_1)$. Calculado $y(t_1)$ determine $x(t_2)$ em $(1)_1$ usando $y(t_1)$ e assim sucessivamente.