Álgebra Linear

Aula 1: Vetores

Mauro Rincon

Márcia Fampa

Informações sobre o curso

- Bibliografia
  - Introdução a Álgebra Linear com Aplicações
    6ª edição
    Editora: LTC
    Autor: Bernard Kolman

1.1 - Vetores

- Grandezas Físicas Escalares
  - Massa
  - Pressão
- Grandezas Físicas Vetoriais
  - Velocidade
  - Força
  - Deslocamento

1.1 - Vetores

- Notação de Vetores: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}$.

- Todos os segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento são representantes de um mesmo vetor.

- Por exemplo: No paralelogramo os segmentos orientados AB e CD determinam o mesmo vetor:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

1.1 - Vetores

Quando escrevemos $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, estamos afirmando que o vetor $\mathbf{v}$ é determinado pelo segmento orientado AB de origem A e extremidade B. Porém, qualquer outro segmento de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido de AB representa também o vetor $\mathbf{v}$.

1.1 - Vetores

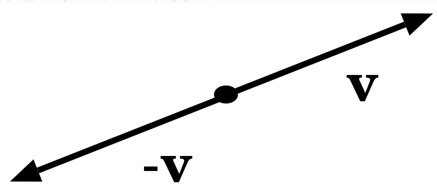
- O comprimento ou módulo do vetor $\mathbf{v}$ é representado por $|\mathbf{v}|$.

- <u>Vetor Nulo</u>
  - Qualquer ponto do espaço é representante do vetor zero (ou vetor nulo), que é indicado por $\mathbf{0}$.

1.1 - Vetores

Vetor Simétrico (ou oposto)

- A cada vetor não nulo $\mathbf{v}$ corresponde um vetor simétrico $(-\mathbf{v})$, que tem o mesmo módulo, a mesma direção, porém com sentido oposto de $\mathbf{v}$.



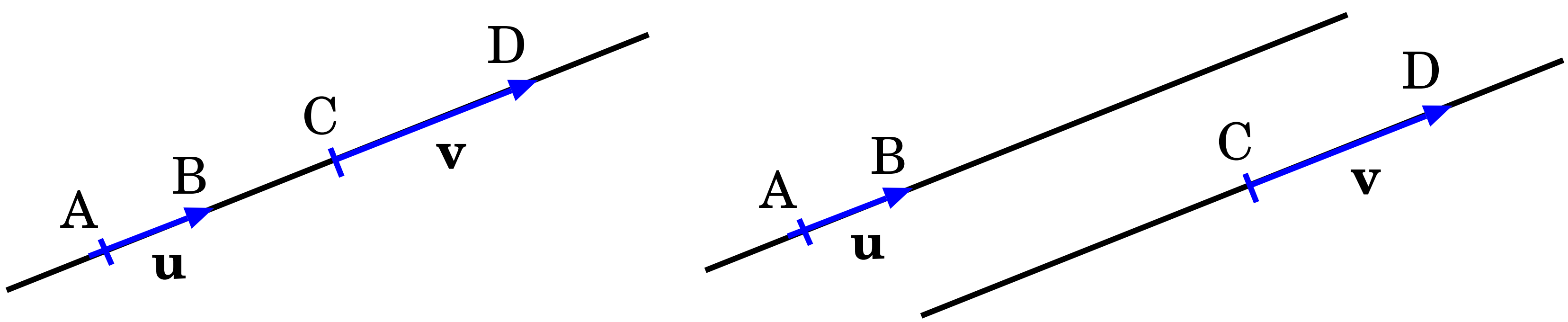
Vetor Unitário

- Um vetor $\mathbf{v}$ é unitário se o seu comprimento é um, ou seja $|\mathbf{v}| = 1$.

1.1 - Vetores

Vetores Colineares

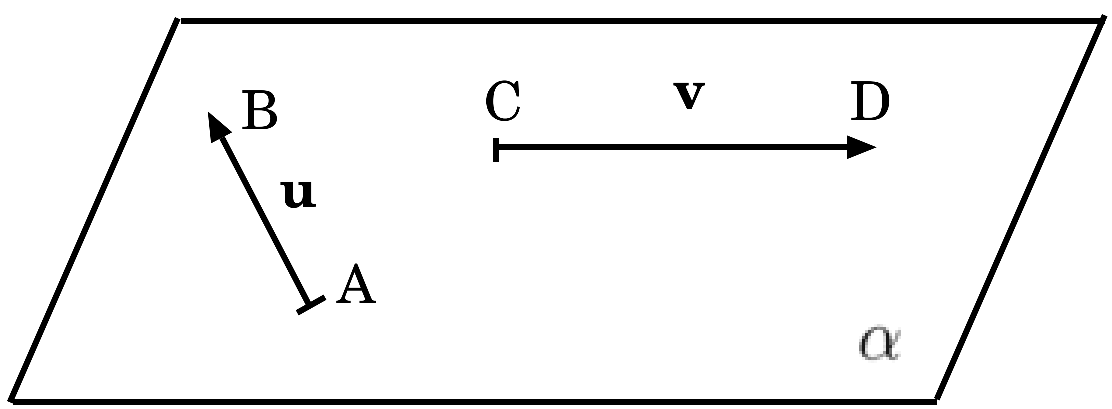
- Dois vetores **u** e **v** são chamados de colineares se tiverem a mesma direção, ou seja, **u** e **v** são colineares se tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.



1.1 - Vetores

Vetores Coplanares

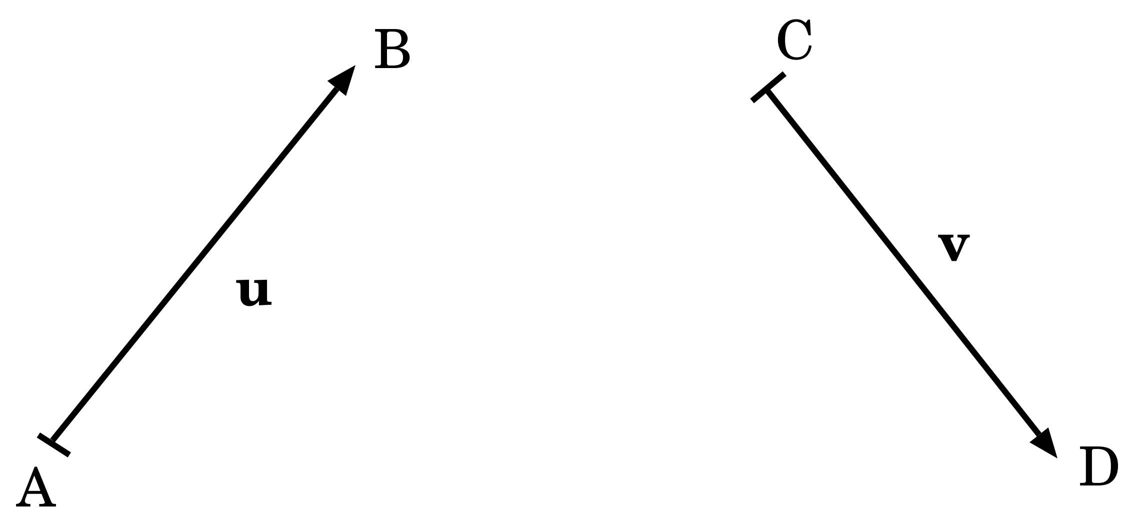
- Quando os vetores não nulos **u** e **v** possuem representantes AB e CD pertencentes a um plano, diz-se que eles são coplanares.



1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

Sejam os vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$ representados na figura:



1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

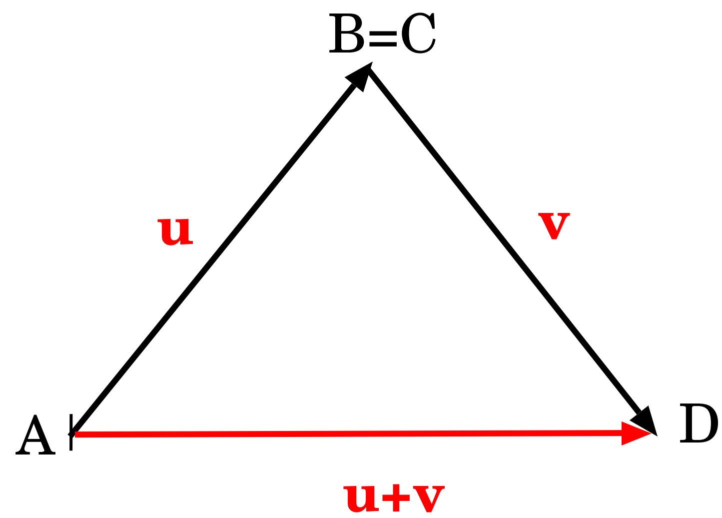
Calcule a soma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
A soma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pode ser determinada da seguinte forma:

a) Tome um segmento de reta orientado que representa $\mathbf{v}$, com origem na extremidade B de $\mathbf{u}$.

b) O vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é representado pelo segmento orientado que vai da origem A de $\mathbf{u}$ até a extremidade D de $\mathbf{v}$.

1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

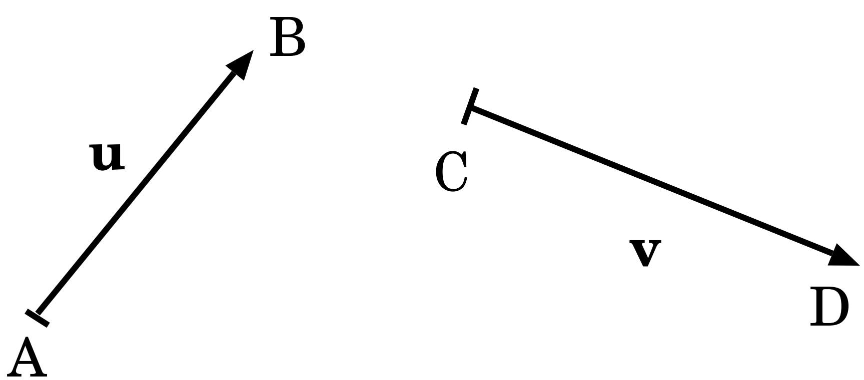


Pode-se notar que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

- Regra do Paralelogramo
  - Uma forma prática de calcular a soma entre dois vetores é construindo um paralelogramo.



Adição Voltar

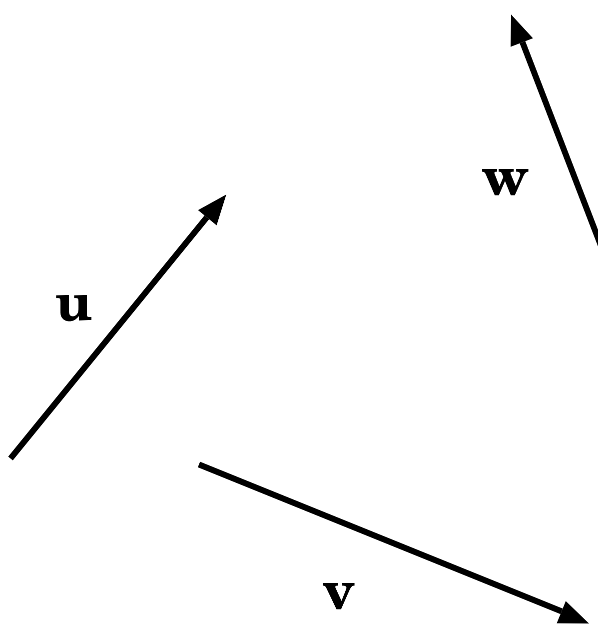
  - Note que $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

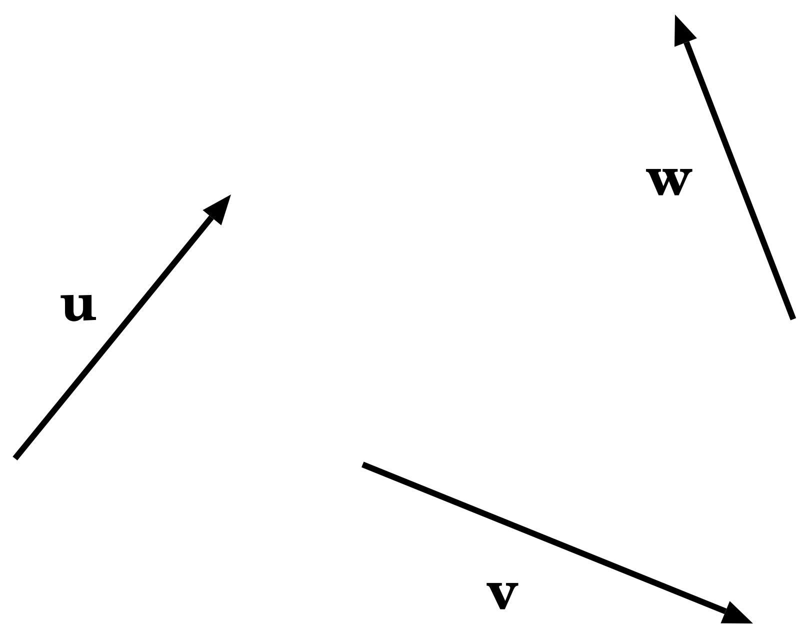
1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

Propriedades da Adição

1) <u>Associativa</u>: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$





1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

Propriedades da Adição

2) Comutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

3) Existe um único vetor nulo $\mathbf{0}$ tal que, para todo vetor $\mathbf{v}$, se tem:

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

4) Para todo vetor $\mathbf{v}$, existe um único vetor $-\mathbf{v}$ (vetor oposto de $\mathbf{v}$) tal que:

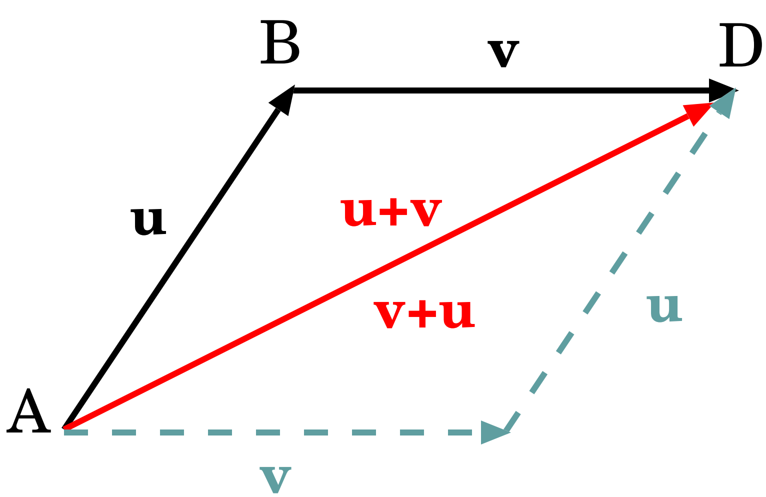
$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = -\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

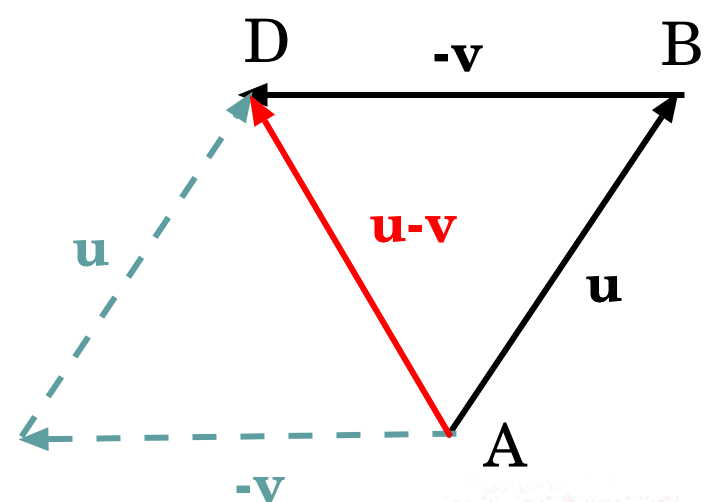
1.2 - Operações com vetores

1.2.1 - Adição de vetores

Observação

- Diferença entre dois vetores: Dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ então a diferença entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é dado pela soma: $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Por exemplo:





1.2 - Operações com vetores

1.2.2 - Multiplicação de um número real por um vetor

Dado um vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e um número real k, chama-se produto do número real $k \neq 0$ pelo vetor $\mathbf{v}$. O vetor $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, tal que:

a) Módulo: $|\mathbf{u}| = |k\mathbf{v}| = |k| \cdot |\mathbf{v}|$.

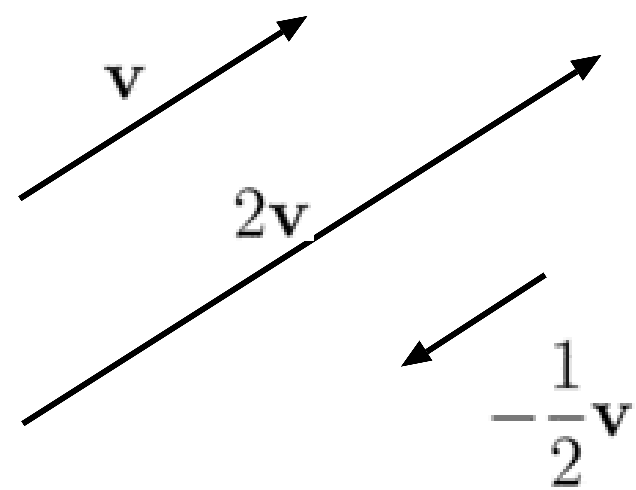
b) Direção: $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tem a mesma direção.

c) Sentido: Se $k > 0$ então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tem o mesmo sentido. Se $k < 0$ então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tem sentidos contrários.

1.2 - Operações com vetores

1.2.2 - Multiplicação de um número real por um vetor

- Observação: Se $k = 0$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
  Se $k = -1$ então $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ é o vetor simétrico.
  Por exemplo:



1.2 - Operações com vetores

1.2.2 - Multiplicação de um número real por um vetor

Propriedades da multiplicação por um número real

Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dois vetores quaisquer e a e b números reais. Então:

a) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$

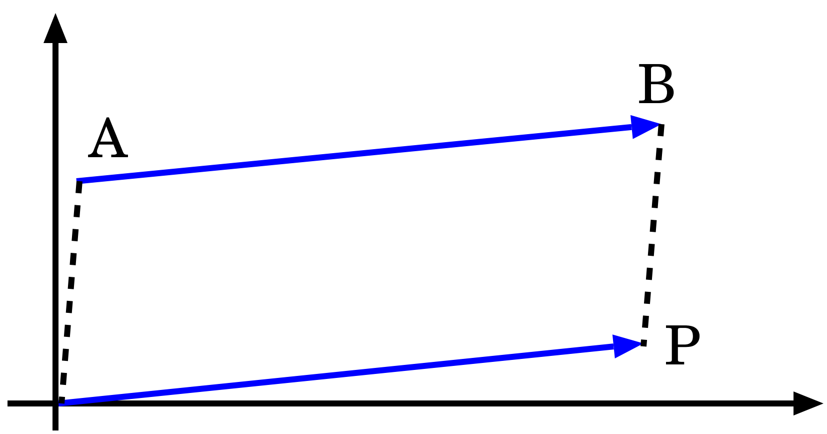
b) $(a+b)(\mathbf{u}) = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$ (propriedade distributiva)

c) $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$

d) $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$

1.3 - Vetores no $\mathbb{R}^2$

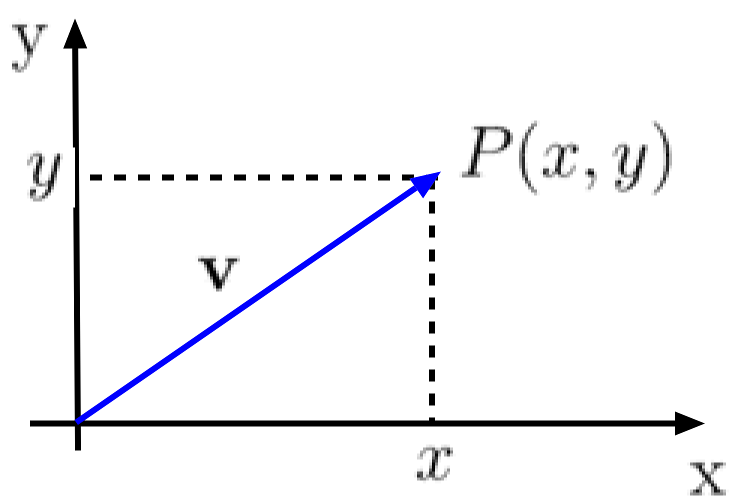
O conjunto:
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$
é interpretado geometricamente como sendo o plano cartesiano XOY.
Todo vetor $\overrightarrow{AB}$ considerado neste plano tem sempre um representante, cuja origem é a origem do sistema.



1.3 - Vetores no $\mathbb{R}^2$

Vetores representados por segmentos de retas orientados com origem na origem do sistema

- Cada vetor do plano é determinado pelo ponto extremo do segmento. Desta forma, o ponto $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ está associado ao vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ e escreve-se $\mathbf{v} = (x, y)$.



1.3 - Vetores no $\mathbb{R}^2$

Vetores representados por segmentos de retas orientados com origem na origem do sistema

- A origem do sistema $O(0,0)$ é o vetor nulo.
- O vetor simétrico de $\mathbf{v} = (x, y)$ é o vetor $-\mathbf{v} = (-x, -y)$.

1.4 - Igualdade e Operações

Igualdade

- Dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Escreve-se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
- Exemplos:

1) Os vetores $\mathbf{u} = (1, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 2)$ são iguais.

2) Sejam $\mathbf{u} = (x - 1, 3)$ e $\mathbf{v} = (3, 2y - 1)$. Determine x e y de tal forma que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
Usando a definição:

$$x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$$
$$3 = 2y - 1 \Leftrightarrow y = 2$$

1.4 - Igualdade e Operações

Operações

- Sejam os vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se:

a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

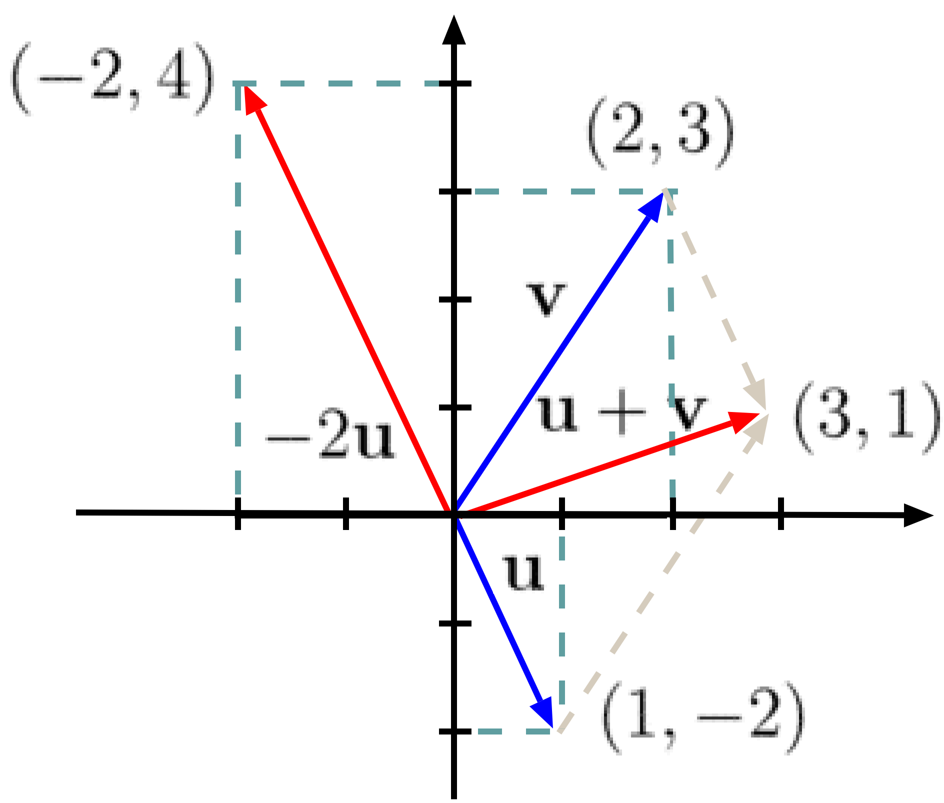
b) $\alpha\mathbf{u} = \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$

1.4 - Igualdade e Operações

Operações

- Exemplo: Sejam $\mathbf{u} = (1, -2)$ e $\mathbf{v} = (2, 3)$.

Então: $\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{v} = (1 + 2, -2 + 3) = (3, 1) \\ -2\mathbf{u} = -2(1, -2) = (-2, 4) \end{cases}$



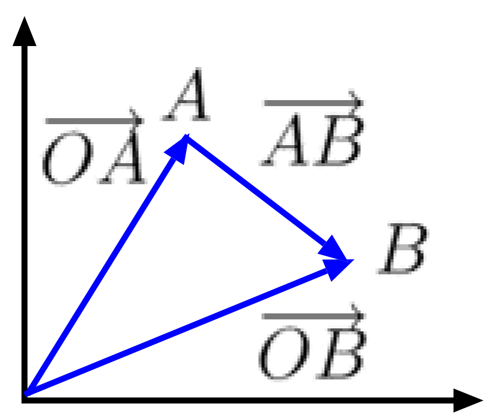
1.5 - Vetor definido por dois pontos

Consideremos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A(x_1, y_1)$ e extremidade $B(x_2, y_2)$. Então o vetor pode ser escrito na forma:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Logo:

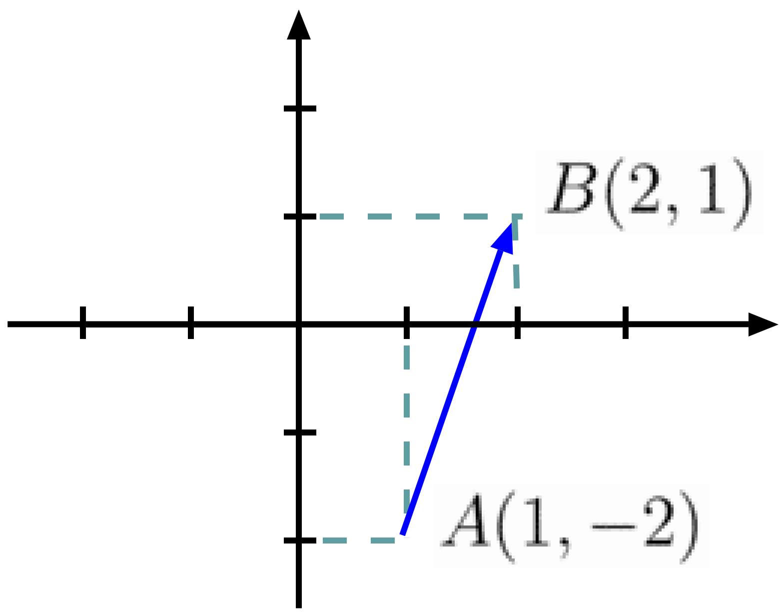
$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



1.5 - Vetor definido por dois pontos

- Por exemplo, se $A(-1,2)$ e $B(2,1)$, então:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2-(-1), 1-2) = (3,-1)$$



1.6 - Produto Escalar

Definição

- Chama-se produto escalar de dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ e representa-se por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ou "$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$" ao número real:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

- Por exemplo:
  Seja $\mathbf{u} = (-1, 2)$ e $\mathbf{v} = (2, 3)$. Então:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 4$$

1.6 - Produto Escalar

Módulo de um vetor

- O módulo de um vetor $\mathbf{v} = (x, y)$, representado por $|\mathbf{v}|$ é um número real não negativo, dado por:
  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(x, y) \cdot (x, y)} = \sqrt{x^2 + y^2}$

- Por exemplo:
  Seja $\mathbf{v} = (2, -3)$, então:
  $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

1.6 - Produto Escalar

Vetor unitário

- Quando $|\mathbf{v}| = 1$, dizemos que o vetor é unitário.

Observação

1) Para cada vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é possível obter um vetor unitário $\mathbf{u}$ fazendo $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

- Por exemplo, seja $\mathbf{v} = (2, -3)$ então $|\mathbf{v}| = \sqrt{13}$. Logo:

$$\mathbf{u} = \frac{(2,-3)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right) \text{ e } |\mathbf{u}| = 1.$$

1.6 - Produto Escalar

2) Dado um vetor $\overrightarrow{AB}$ com extremidades nos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. O módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ é dado por:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

que é a distância entre os pontos A e B.

1.6 - Produto Escalar

Propriedades do Produto Escalar

- Dados quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

  I) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$ para $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

  II) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (comutativa)

  III) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (distributiva)

  IV) $\alpha(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}).\mathbf{v} = \mathbf{u}.(\alpha\mathbf{v})$

1.6 - Produto Escalar

Observação

- Das propriedades **(I)** - **(IV)** obtemos que:

1) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}.\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$

De fato:

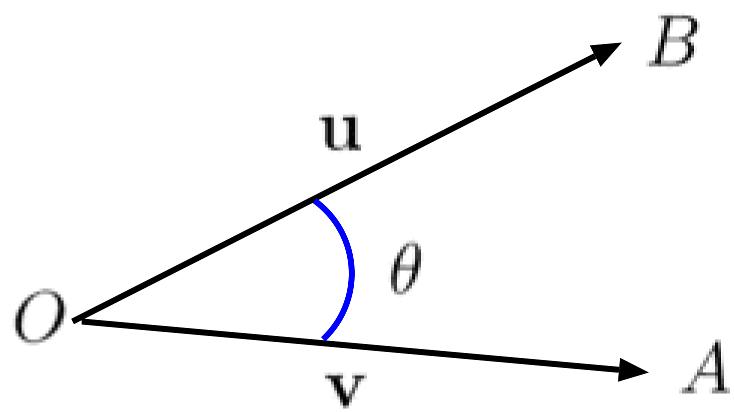
$$\begin{aligned} |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v}).(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}.(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \mathbf{v}.(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}.\mathbf{u} + \mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{v}.\mathbf{u} + \mathbf{v}.\mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}.\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 \end{aligned}$$

Mostre que, de forma análoga:

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u}.\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$$

1.7 - Ângulo de dois vetores

O ângulo de dois vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$, não nulos, é o ângulo θ formado pelas semi-retas OA e OB, onde $0 \leq \theta \leq \pi$.



1.7 - Ângulo de dois vetores

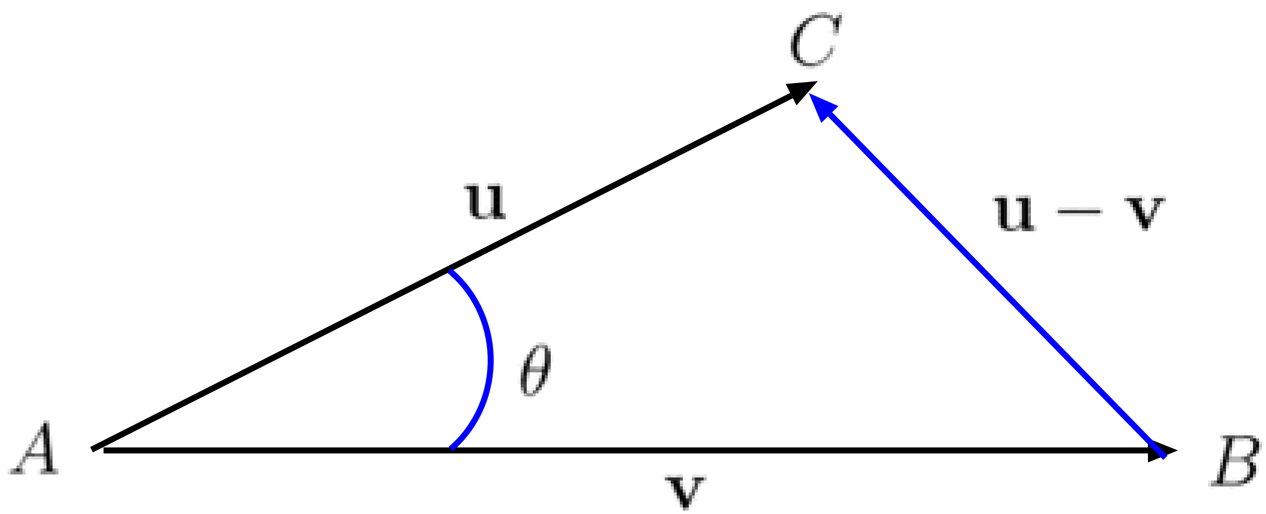
Cálculo do Ângulo de dois Vetores

- Sejam os vetores não nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. O ângulo θ formado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pode ser calculado pela fórmula:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|}}$$

1.7 - Ângulo de dois vetores

Cálculo do Ângulo de dois Vetores



1.7 - Ângulo de dois vetores

Cálculo do Ângulo de dois Vetores

- De fato: Aplicando a lei dos co-senos ao triângulo ABC, temos:

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cos\theta \quad (1)$$

Mas sabemos que:

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), obtemos:

$$|\mathbf{u}|^2-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cos\theta$$

1.7 - Ângulo de dois vetores

Cálculo do Ângulo de dois Vetores

- Logo:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\theta$$

Daí:

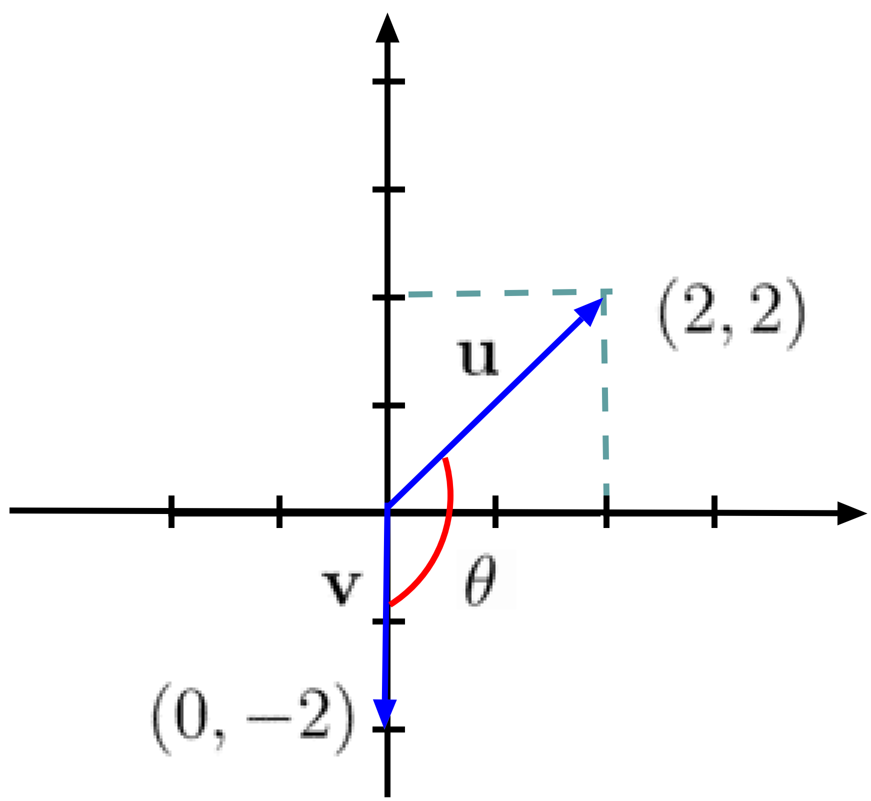
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Com o valor do $\cos\theta$ calculado então o ângulo θ pode ser determinado.

- Note que $0 \leq \theta \leq \pi$.

1.7 - Ângulo de dois vetores

- Exemplo: Seja $\mathbf{u} = (2, 2)$ e $\mathbf{v} = (0, -2)$. Determine o ângulo θ entre vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.



1.7 - Ângulo de dois vetores

- Resolução do Exemplo:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$

Temos que:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Assim:

$$\cos\theta = \tfrac{-4}{\sqrt{8}\cdot 2}$$

Logo

$$\theta = \arccos\tfrac{-\sqrt{2}}{2} = 135^o = \tfrac{3\pi}{4}$$

1.8 - Paralelismo e Ortogonalidade de Dois Vetores

a) Vetores Paralelos:

Dizemos que dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos (ou colineares), se existe um número real α tal que:

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v} \Leftrightarrow (x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

Logo:

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha} \quad ③$$

A relação ③ significa que dois vetores são paralelos se suas componentes são proporcionais.

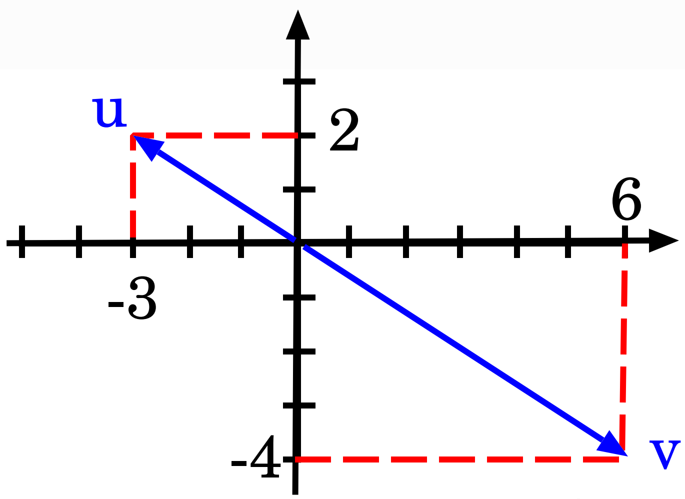
1.8 - Paralelismo e Ortogonalidade de Dois Vetores

- Por exemplo, os vetores $\mathbf{u} = (-3, 2)$ e $\mathbf{v} = (6, -4)$ são paralelos pois:

$$\frac{-3}{6} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

ou seja,

$$\boxed{\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}}$$



1.8 - Paralelismo e Ortogonalidade de Dois Vetores

b) Vetores Ortogonais:

Dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ são ortogonais ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$), se o ângulo θ por eles formado é de 90^o, ou seja, $\cos\theta = 0$. Da definição de ângulo temos:

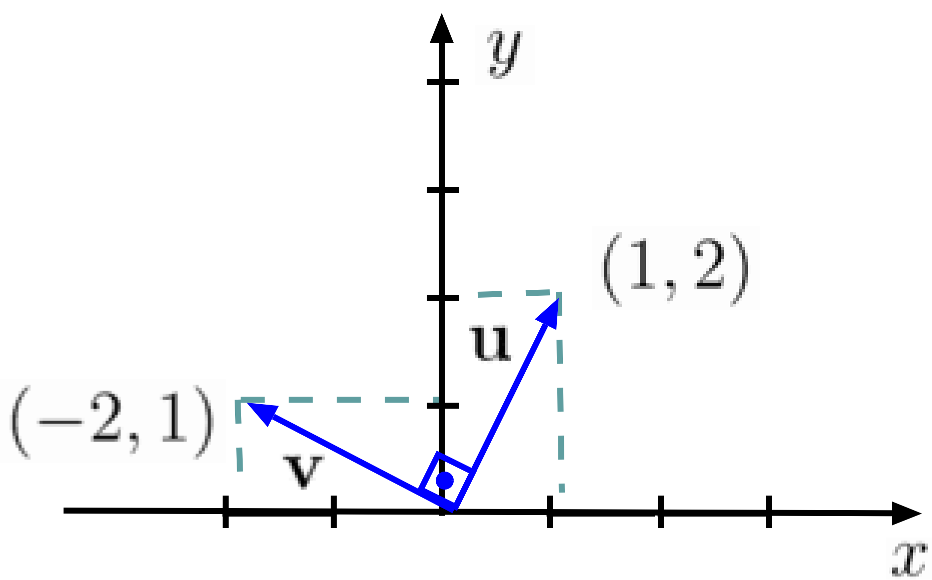
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$$

Assim, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Também dizemos que dois vetores são ortogonais se pelo menos um deles é o vetor <u>nulo</u>. Portanto, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

1.8 - Paralelismo e Ortogonalidade de Dois Vetores

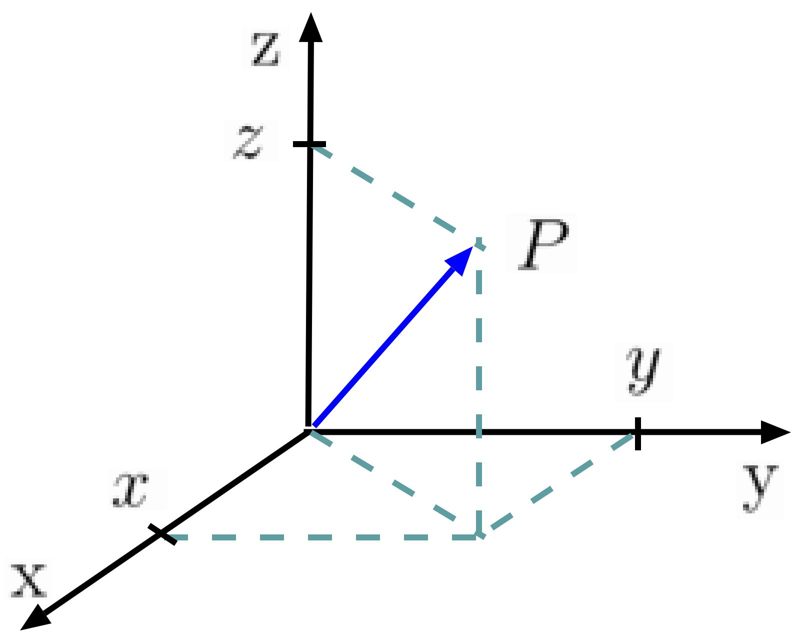
- Exemplo:
  Os vetores $\mathbf{u} = (1, 2)$ e $\mathbf{v} = (-2, 1)$ são ortogonais. De fato:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, 2) \cdot (-2, 1) = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0$$



1.9 - Vetores no $\mathbb{R}^3$

- O conjunto $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é interpretado geometricamente como sendo o espaço cartesiano tridimensional $OXYZ$. Neste espaço, o ponto $P(x, y, z)$ individualiza o vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ e escreve-se $\mathbf{v} = (x, y, z)$.



1.9 - Vetores no $\mathbb{R}^3$

- A origem do sistema $O(0,0,0)$ representa o vetor nulo. O vetor simétrico de $\mathbf{v} = (x, y, z)$ é o vetor $-\mathbf{v} = (-x, -y, -z)$.
- Propriedades:

1) Dois vetores $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

2) Dados $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

1.9 - Vetores no $\mathbb{R}^3$

- Propriedades:

3) Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

4) Produto escalar:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

5) Módulo do vetor $\mathbf{v} = (x, y, z)$ é dado por:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.9 - Vetores no $\mathbb{R}^3$

- Propriedades:

6) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não-nulos e θ é o ângulo formado por eles, então:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$

7) Sejam $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

a) $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ se, e somente se, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

b) $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ se, e somente se, $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

1.10 - Vetores no $\mathbb{R}^n$

- O conjunto

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores do $\mathbb{R}^n$, então eles são representados por: $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

1.10 - Vetores no $\mathbb{R}^n$

- Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ então define-se:

  a) $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, se e somente se, $x_i = y_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

  b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

  c) $\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$.

  d) $\mathbf{u}.\mathbf{v} = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n)$.

  e) $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}.\mathbf{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

Exercícios

- Faça os seguintes exercícios da seção 3.1, páginas 115/116 do livro texto.

  1) (a), (c) e (e)
  2) (a) e (b)
  3)
  5) (a), (b) e (c)
  7) (a), (b) e (c)
  10) (a) e (d)
  12) (a) e (c)
  14)
  19) (a) e (b)
  21) (b) e (c)
  24) (a), (b) e (c)

- Exercícios Teóricos

  - T.1, T.3, T.5 e T.8.