Soluções Algébricas de Folheações Holomorfas: Uma Abordagem Algorítmica

Luis Menasche Schechter

Projeto Final de Curso submetido ao Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Ciência da Computação.

Apresentado por:

Luis Menasche Schechter

Aprovado por:

Severino Collier Coutinho

Antônio Roberto da Silva

Jorge Vitório Pereira

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Janeiro de 2005

Este trabalho é dedicado a minha mãe

Rosa Menasche Schechter

e a meu pai

Marcos Schechter,

por razões que não necessitam de explicação

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar ao professor Severino Collier Coutinho. O professor Collier é meu orientador neste Trabalho Final de Curso, foi meu orientador no projeto de Iniciação Científica durante dois anos e foi meu professor em quatro disciplinas do meu curso de graduação, número não igualado por nenhum outro docente. Eu não poderia ter um orientador melhor, mais dedicado, mais atencioso, mais organizado e mais sério.

Meu colega de Iniciação Científica, Rodrigo Montenegro de Oliveira, também merece muitos agradecimentos. Quando eu estava começando, no primeiro semestre de 2003, ele esteve sempre disponível, transmitindo-me seus conhecimentos adquiridos pela maior experiência dentro do projeto.

Gostaria de destacar também o importantísimo trabalho realizado por todos os excelentes professores que tive durante meus quatro anos no curso de graduação em Ciência da Computação. Para não construir falsas hierarquias, irei citá-los em ordem alfabética: Adriano Cruz, Ageu Pacheco, Bruno Costa, Celina Figueiredo, Edmundo Silva, Flávio Dickstein, Geraldo Zimbrão da Silva, Luca Moriconi, Mario Benevides, Miguel Jonathan, Rolci Cipolatti, Sérgio Guedes, Severino Collier Coutinho e Sulamita Klein. Muito obrigado a todos.

Não poderia deixar de citar aqui os meus amigos do curso de Graduação. Graças a eles, estes quatro anos tornaram-se muito mais agradáveis e a Universidade se transformou em um ambiente muito mais acolhedor.

Agradeço também à equipe de desenvolvimento do sistema de Computação Algébrica Singular por desenvolver um sistema bastante simples e intuitivo para operação com polinômios. O fato do sistema ser tão bem projetado definitivamente foi um facilitador durante a implementação deste Trabalho Final.

Por último, devo agradecer também ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica a mim concedida pelo trabalho no projeto de Iniciação Científica do professor Collier.

RESUMO

Soluções Algébricas de Folheações Holomorfas: Uma Abordagem Algorítmica

Luis Menasche Schechter

Orientador: Severino Collier Coutinho

Este trabalho tem o objetivo de apresentar dois algoritmos que podem ser utilizados para determinar se uma dada folheação holomorfa do plano projetivo complexo possui uma solução algébrica e discutir a performance de suas implementações no sistema de Computação Algébrica Singular.

ABSTRACT

Algebraic Solutions of Holomorphic Foliations: An Algorithmic Approach

Luis Menasche Schechter

Supervisor: Severino Collier Coutinho

This dissertation presents two algorithms that can be used to check whether a given holomorphic foliation of the complex projective plane has an algebraic solution and discusses the performance of their implementations in the Computer Algebra system Singular.

Sumário

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução e Objetivos

"Tudo vale a pena se a alma não é pequena." - Fernando Pessoa

"I'll show you the life of the mind." - John Goodman em "Barton Fink"

Este capítulo inicial tem dois objetivos principais: fornecer um breve apanhado histórico dos estudos relacionados a folheações singulares no plano projetivo e traçar um roteiro de como o tema da existência (ou não) de soluções algébricas será abordado nos capítulos seguintes. O leitor não deve sentir-se incomodado caso não compreenda totalmente alguma parte da terminologia utilizada neste capítulo, pois todos os conceitos serão devidamente explicados mais adiante nesta dissertação.

1.1 Uma breve retrospectiva histórica

A questão de determinar soluções algébricas para equações diferenciais[1] já é bastante antiga. O estudo destas soluções no caso de primeira ordem re-

[1]Equações Diferenciais e Folheações são estruturas relacionadas.

monta ao trabalho de G. Darboux realizado na década de 1870. Em [1], Darboux demonstrou que uma dada equação linear deste tipo deve possuir uma integral primeira caso tenha um número suficientemente grande de soluções algébricas. Mais tarde, em 1891, Poincaré [2] sugeriu que, para encontrar-se uma solução algébrica explícita para uma tal equação, seria suficiente encontrar um limite superior para o grau da solução em função do grau dos polinômios que definem a equação.

Um dos resultados dos estudos em torno deste tema é o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Se a equação é definida por polinômios de grau menor ou igual a 2 então ela sempre possui soluções de grau 1 ou 2.*

No século XX, os resultados obtidos por Darboux e Poincaré foram rearrumados como parte da teoria das Folheações Holomorfas. A procura por limites no grau das soluções passou a ser conhecida como o *Problema de Poincaré* e vários destes limites são atualmente conhecidos (para alguns exemplos, consulte [3] e [4]). No entanto, estes limites mostraram-se ser de uso muito limitado na solução de equações diferenciais devido ao seguinte resultado obtido por J. P. Jouanolou [5, teorema 1.1, p. 158].

Teorema 1.2. *Uma folheação genérica de $\mathbb{P}^2$ de grau*[2] *maior ou igual a 2 não possui nenhuma solução algébrica.*

Como parte da prova deste teorema, Jouanolou deu um exemplo explícito de uma família de folheações sem nenhuma solução algébrica. Entretanto, em mais uma reviravolta irônica, apesar do Teorema 1.2 nos dizer que a grande maioria das folheações não possui solução algébrica, existem muito poucos

[2] A definição de grau de uma folheação será apresentada mais adiante nesta monografia.

exemplos concretos (com coeficientes racionais, digamos) conhecidos. A situação ainda se torna pior, pois a grande maioria destes exemplos conhecidos é composta de variações do exemplo de Jouanolou, fazendo uso do fato de que o conjunto de singularidades da folheação possui um grupo de simetria bastante grande.

Uma outra abordagem para encontrar mais destes exemplos consiste em gerar uma folheação aleatória (com coeficientes indeterminados) de um dado grau e, através do uso de um computador, verificar que ela não possui uma solução algébrica de grau menor ou igual a um determinado limite fornecido por alguma solução do Problema de Poincaré. Esta solução foi implementada com sucesso em [6]. A grande desvantagem deste método reside no fato de que as computações necessárias nesta abordagem são extremamente custosas, o que terminou por limitar a 3 o grau das folheações que ele pode manipular.

Uma possível maneira de resgatar a abordagem algorítmica é buscar um procedimento que irá provar que uma dada folheação não possui nenhuma solução algébrica ou retornar *"Uhm...Eu não sei"*. Este é exatamente o objetivo final deste trabalho. Na verdade, esta dissertação propõe dois algoritmos que seguem esta linha de pensamento. A razão pela qual espera-se que eles serão bem sucedidos, na maioria dos casos, é o fato bem conhecido de que um polinômio genérico em uma variável com coeficientes racionais é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Em um projeto futuro, esta estratégia pode ser usada para construir famílias de folheações sem solução algébrica que são muito mais gerais que as de Jouanolou.

1.2 Um roteiro do que virá adiante

Esta seção tem como objetivo mostrar de maneira resumida quais serão os passos nesta jornada até os dois algoritmos estabelecidos como objetivos finais desta dissertação.

No Capítulo 2 serão apresentados alguns conceitos algébricos básicos, tais como *funcionais, produto exterior, campos de vetores e espaço projetivo*, que são importantes no entendimento matemático dos campos de retas e das folheações holomorfas.

No Capítulo 3 será apresentado o conceito de *campo de retas* e a notação de *formas diferenciais*, particularmente a 1-forma, uma construção muito útil para a representação destes campos.

No Capítulo 4 serão utilizados os conceitos dos dois capítulos anteriores para a definição do objeto de estudo deste trabalho: as *folheações do plano projetivo*. Para tal, este capítulo introduz alguns conceitos e resultados básicos da teoria de folheações e, como não poderia faltar, estabelece precisamente o que é uma "solução algébrica" de uma folheação.

No Capítulo 5 todas as cartas já estão na mesa e o primeiro algoritmo pode então ser apresentado. Antes porém, é necessária uma breve explanação sobre a Teoria das Bases de Gröbner e o Algoritmo de Buchberger, que são o coração dos dois algoritmos apresentados nesta dissertação.

No Capítulo 6 é hora de mais um passo adiante ser dado, com a apresentação do segundo algoritmo. A ordem de apresentação dos dois algoritmos não foi definida pelo acaso. Este segundo algoritmo possui uma complexidade, tanto teórica quanto computacional, consideravelmente maior do que o primeiro.

No Capítulo 7 é hora de deixar a teoria de lado e colocar o computador para funcionar. Neste capítulo, são mostrados os testes realizados com os dois algoritmos e os resultados obtidos. Para realização dos testes, os algoritmos foram implementados e executados no Sistema de Computação Algébrica Singular [7].

No capítulo 8 todo o terreno já foi percorrido, sendo então o momento de se olhar para trás e responder às perguntas:

1. A eficiência é satisfatória? Ou os algoritmos praticamente só retornam "Eu não sei"?

2. Esta abordagem é melhor que as já existentes?

3. Esta abordagem é boa do ponto de vista matemático. Mas é também computacionalmente eficiente?

4. Até que grau os algortimos retornaram repostas em tempos razoáveis?

Agora que o roteiro está traçado, é hora de percorrê-lo.

Capítulo 2

Alicerces Algébricos

"Mathematics is the only true universal language." - Jodie Foster em "Contact"

"Science is organized knowledge. Wisdom is organized life." - Immanuel Kant

Neste capítulo, discutiremos alguns conceitos algébricos básicos que são importantes para o entendimento do problema que é tratado nesta monografia.

2.1 Retas e Funcionais

2.1.1 Descrição Matemática de Retas pela Origem

Seja K um corpo.[1] A descrição de uma reta que passa pela origem de K^2, pode ser feita de duas formas diferentes: como o conjunto de pontos do plano que são múltiplos de um dado vetor, chamado de *vetor diretor da reta*, ou como o conjunto dos pontos que são zeros de uma determinada equação linear homogênea, a equação cartesiana da reta.

[1] Ao longo de toda a dissertação, podemos pensar em K como sendo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

De acordo com a primeira abordagem, dada uma reta r de K^2 que passa pela origem e um vetor $u \neq 0$ que pertence a r, a reta é descrita como

$$r = \{ut : t \in K\}.$$

Esta é uma *equação paramétrica* da reta r. Podemos também escrever $r = \langle u \rangle$, querendo dizer que os vetores de r são todos múltiplos escalares de u.

Em oposição, para descrever r a partir de uma equação homogênea, precisamos alterar nosso ponto de vista, considerando a reta agora como um conjunto de vetores que é perpendicular a um vetor dado, chamado de *vetor normal à reta*. Sendo $u^\perp$ um vetor não nulo perpendicular a u, temos que

$$r = \{v \in K^2 : v \cdot u^\perp = 0\},$$

onde o ponto denota a operação de produto interno. Assim, se $u = (a, b)$, podemos tomar $u^\perp = (b, -a)$, de modo que r passa a ser o conjunto de vetores (x, y) que satisfazem a equação $bx - ay = 0$.

Na construção dos algoritmos e nas suas bases matemáticas, estaremos representando retas como conjuntos de pontos que são zeros de uma equação homogênea, pois esta abordagem nos permite trabalhar com polinômios, o que para o nosso caso específico é melhor do que trabalhar com vetores.

Podemos facilmente reescrever esta segunda abordagem de acordo com a terminologia da álgebra linear. Para isto, basta que pensemos em termos de transformações lineares. Mais precisamente, seja $\lambda : K^2 \to K$ a transformação dada por $\lambda(x, y) = bx - ay$. Então,

$$r = \{v \in K^2 : \lambda(v) = 0\}.$$

Em outras palavras, r é o núcleo $N(\lambda)$ de λ.

Uma transformação linear de um K-espaço vetorial V em K é conhecida como um *funcional linear*. O conjunto dos funcionais lineares de V em K é denotado por V^*. Uma verificação rotineira nos mostra que V^* também é um espaço vetorial conhecido como o *espaço dual* de V.

Naturalmente, se V^* é um espaço vetorial, então deve admitir uma base. Podemos facilmente construir uma base de V^* a partir de uma base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V. A base de V^* assume a forma $B^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$, onde $v_i^*, 1 \leq i \leq n$ são funcionais lineares definidos da seguinte forma:

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{2.1}$$

Como a dimensão de um espaço vetorial é igual ao número de elementos de uma base, podemos concluir também que $\dim(V) = \dim(\mathrm{V}^*)$.

A relação entre uma base de K^2 e sua base dual fica mais clara quando escrevemos vetores e funcionais em notação matricial. Como é usual, representamos os vetores como matrizes coluna. Seja e_i o vetor que possui 1 na i-ésima posição e 0 nas demais. Pela equação (2.1), e_i^* deve corresponder à matriz linha que possui 1 na i-ésima posição e 0 nas demais. Em outras palavras, $e_i^* = e_i^t$.

Finalmente, podemos observar que, de acordo com o teorema do núcleo e da imagem, a dimensão do núcleo de um funcional linear sobre um espaço vetorial V é $dim(V) - 1$. Logo, o núcleo de um funcional de K^2 representa realmente uma reta.

Existe uma notação muito utilizada para a base dual, que remonta ao século XVII. Digamos que x, y sejam as coordenadas de K^2 e que $\{e_1, e_2\}$ seja a base canônica. Neste caso, o funcional e_1^* da base do espaço dual é usualmente denotado por dx e o funcional e_2^* por dy. Isto significa que $dx(x, y) = x$ e $dy(x, y) = y$. Usando esta notação, temos que qualquer funcional de K^2 pode ser escrito como

$$adx + bdy,$$

com $a, b \in K$.

2.1.2 Retas Coincidentes

Suponhamos agora que temos duas retas r_1 e r_2 de K^2, ambas passando pela origem e queremos determinar se elas são ou não coincidentes.

Vamos considerar este problema no caso das retas serem definidas pelas suas equações cartesianas, isto é, pelo anulamento de funcionais. Digamos que $r_1 = N(\lambda_1)$ e $r_2 = N(\lambda_2)$, onde λ_1 e λ_2 são funcionais lineares não nulos definidos em K^2. Para que $r_1 = r_2$, é necessário que os dois núcleos coincidam. Neste caso, qualquer vetor $u \in N(\lambda_1) = N(\lambda_2)$ é uma base de ambos os núcleos. Escolhemos, então, um vetor não nulo $w \in K^2, w \notin N(\lambda_1) = N(\lambda_2)$. Isto implica que $\{u, w\}$ é uma base de K^2 (já que u e w são linearmente independentes por construção), de modo que qualquer vetor

$v \in K^2$ pode ser escrito na forma $v = au + bw$. Logo,

$$\lambda_j(v) = \lambda_j(au + bw) = b\lambda_j(w),$$

para $j = 1$ ou 2. Temos então

$$\frac{\lambda_1(v)}{\lambda_1(w)} = \frac{\lambda_2(v)}{\lambda_2(w)} = b.$$

Como $\lambda_1(w) \neq 0$, já que $w \notin N(\lambda_1)$, segue que

$$\lambda_2(v) = \frac{\lambda_2(w)}{\lambda_1(w)}\lambda_1(v) = c\lambda_1(v),$$

qualquer que seja $v \in K^2$. Em outras palavras, os funcionais λ_1 e λ_2 são múltiplos constantes um do outro.

Podemos reformular isto dizendo que $\lambda_1 = c\lambda_2$ se, e somente se,

$$\lambda_1(u)\lambda_2(v) - \lambda_1(v)\lambda_2(u) = 0,$$

quaisquer que sejam $u, v \in K^2$. Temos assim um determinante, expresso como

$$\det \begin{bmatrix} \lambda_1(u) & \lambda_2(u) \\ \lambda_1(v) & \lambda_2(v) \end{bmatrix}$$

Devemos notar que este determinante depende de quatro elementos: dois funcionais (λ_1 e λ_2) e dois vetores de K^2 (u e v). Para deixar isto claro, escrevemos

$$(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(u, v)$$

para denotar este determinante. O símbolo $\wedge$ denota uma operação que associa dois funcionais a um determinante, chamada de *produto exterior*.

Enumeremos agora algumas propriedades do produto exterior. Como a permutação das linhas ou das colunas do determinante inverte o seu sinal, temos que

1. $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(u, v) = -(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(v, u)$
2. $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(u, v) = -(\lambda_2 \wedge \lambda_1)(u, v)$
3. $(\lambda \wedge \lambda)(u, v) = 0,$ para todo $\lambda \in (K^2)^*$

Encerramos esta seção com o principal resultado que obtivemos e que será muito utilizado no restante deste trabalho.

Resultado 2.1. *Duas retas pela origem em K^2 definidas pelos núcleos dos funcionais λ_1 e λ_2 são coincidentes se, e somente se, $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(u, v) = 0,$ para todo $u, v \in K^2$.*

2.2 Campos de Vetores

Nesta seção iremos definir o conceito de campo de vetores. Este é um passo muito importante, pois a estrutura em que iremos trabalhar mais adiante nesta monografia, o campo de retas, pode ser encarado como uma generalização do conceito de campo de vetores.

Um campo vetorial definido em um aberto $U \subset K^2$ é uma função $F : U \to K^2$. A razão para o nome campo vetorial vem da interpretação que damos a esta função: pensamos em F como uma regra que, a cada ponto p do aberto U associa um vetor $F(p) \in K^2$.

Um campo vetorial muito importante e que aparece mais adiante neste trabalho é o *campo gradiente*. Seja $g(x,y)$ uma função diferenciável definida em um aberto U de K^2, $g : U \to K$. O campo gradiente de g é dado pela aplicação $\nabla g : U \to K^2$, definida por

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right).$$

Este campo está sujeito a duas interpretações possíveis, de acordo com a maneira que olhamos para $g(x,y)$. Se pensarmos na superfície em K^3 construída a partir dos pontos $(x, y, g(x,y))$ (gráfico da função g), então o gradiente de g no ponto (x,y) nos diz em que direção a altura dessa superfície varia mais rapidamente partindo deste ponto.

A outra interpretação do campo gradiente surge quando, ao invés de pensarmos no gráfico de g, que é uma superfície de K^3, consideramos as curvas de K^2 definidas por

$$C_k = \{(x,y) \in K^2 : g(x,y) = k\},$$

onde $k \in K$. Como g determina a altura de um ponto do gráfico acima do plano xy, os pontos de C_k são todos aqueles que têm altura k acima de xy. Em outras palavras, C_k é a *curva de nível* k do gráfico de g. Sob esta interpretação, temos que se $p \in C_k$ e $\nabla g(p) \neq 0$, então $\nabla g(p)$ é normal a C_k em p.

2.3 O Espaço Projetivo

Na seção anterior, realizamos uma transição do estudo de um vetor para o estudo de uma regra que a cada ponto de uma região associa um vetor, ou seja, um campo vetorial. Este mesmo procedimento pode ser aplicado às retas, considerando uma aplicação que a cada ponto de um aberto $U \subset K^2$ associa uma reta pela origem. Por analogia ao caso vetorial, uma aplicação assim é conhecida como um *campo de retas*.

Entretanto, um problema surge imediatamente: qual é o contra-domínio de um campo de retas? Naturalmente, a resposta é "o conjunto de todas as retas pela origem". Mas, na verdade, o que queremos saber é qual é o espaço que representa as retas pela origem de K^2. Para responder a esta pergunta, precisamos construir espaços cujos "pontos" representam as retas pela origem de um espaço vetorial. Estes são os *espaços projetivos*, que serão o alvo de estudo desta seção.

2.3.1 Construção de um Espaço Projetivo

O método para a construção de um espaço projetivo, isto é, um espaço em que os "pontos" representam as retas pela origem de um espaço vetorial V, é razoavelmente simples. O ponto de partida é uma relação de equivalência que identifique em um único elemento todos os pontos de uma reta pela origem em V. Podemos pensar em uma reta pela origem como uma coleção de vetores em uma mesma direção. No entanto, vetores em uma mesma direção são necessariamente múltiplos um do outro. A partir deste fato, podemos definir a relação de equivalência $\sim$ entre dois vetores u e v de V como

$$u \sim v \text{ se existe } c \in K \setminus \{0\} \text{ tal que } v = cu.$$

A classe de equivalência de um vetor u por $\sim$ será denotada por $[u]$. Isto significa que $[u]$ representa a reta pela origem que possui u como vetor diretor. No entanto, o vetor diretor não pode ser nulo, portanto 0 não faz parte de nenhuma classe de equivalência.

O espaço quociente de $V \setminus \{0\}$ por $\sim$ é chamado de *espaço projetivo*. Podemos dizer então que os pontos deste espaço são as classes de equivalência dos vetores não nulos de V por $\sim$. O espaço projetivo definido sobre V é denotado por $\mathbb{P}(V)$ e seus elementos chamam-se *pontos projetivos*.

2.3.2 Coordenadas Homogêneas

Para entendermos as propriedades geométricas de $\mathbb{P}(V)$, precisamos primeiramente introduzir coordenadas no espaço projetivo. Vamos supor que B seja uma base de V. Com isso, podemos pensar nos vetores de V como n-uplas. Sendo u um vetor não nulo, podemos escrevê-lo como $u = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ e, conseqüentemente,

$$[u] = [x_0 : \ldots : x_{n-1}].$$

Estas são *as coordenadas homogêneas* do ponto $[u]$ de $\mathbb{P}(V)$. Entretanto, no espaço projetivo, cada ponto não está associado a apenas uma n-upla. De acordo com a relação $\sim$, todas as n-uplas $[cx_0 : \ldots : cx_{n-1}]$, $c \neq 0 \in K$

representam o mesmo ponto projetivo. Desta forma, podemos recorrer às coordenadas homogêneas para descrever pontos projetivos de $\mathbb{P}(V)$.

Apesar da construção do espaço projetivo ser baseada em um espaço vetorial subjacente V de dimensão n, o espaço $\mathbb{P}(V)$ possui dimensão $n-1$. Por isso, uma outra notação para $\mathbb{P}(K^n)$ é $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ ou mesmo $\mathbb{P}^{n-1}$, se o corpo estiver implícito no contexto. Para enxergarmos essa diferença entre as dimensões dos dois espaços, vamos considerar um ponto $[u]$ cuja coordenada x_0 é não nula. Temos então

$$[u] = [x_0 : \ldots : x_{n-1}] = \left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_0} : \frac{x_{n-1}}{x_0}\right].$$

Se agora considerarmos um segundo ponto $[v]$ que também possui a primeira coordenada não nula, concluímos que sempre é possível escolher as coordenadas homogêneas destes pontos de forma a escrevê-los como

$$[u] = [1 : u_1 : \ldots : u_{n-1}] \text{ e } [v] = [1 : v_1 : \ldots : v_{n-1}].$$

Desta forma, $[u] = [v]$ se, e somente se, $u_i = v_i$, para todo $1 \leq i \leq n-1$, logo o conjunto $\mathbb{P}(V)$ possui apenas $n-1$ graus de liberdade.

Mais formalmente, seja U_0 o conjunto dos pontos projetivos de $\mathbb{P}(V)$ que possuem a primeira coordenada não nula e seja $\phi_0 : U_0 \to K^{n-1}$ uma aplicação definida por

$$\phi_0([x_0 : \ldots : x_{n-1}]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_0}\right).$$

Obviamente, poderíamos definir U_i e ϕ_i analogamente, para qualquer $1 \leq i \leq$

$n-1$. A partir desta função podemos copiar objetos entre os dois espaços K^{n-1} e $\mathbb{P}^{n-1}(K)$.

2.3.3 O Plano Projetivo

Nesta seção, discutiremos o espaço projetivo em que estamos interessados neste trabalho. Trata-se de do espaço $\mathbb{P}^2(K)$. Para este espaço, temos $\phi_0 : U_0 \to K^2$ definida por

$$\phi_0([x_0 : x_1 : x_2]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right).$$

Devido a esta relação entre $\mathbb{P}^2(K)$ e K^2, definida por ϕ_0, este espaço é conhecido como *plano projetivo*.[2] Se chamarmos as coordenadas de K^2 de x e y, temos que

$$x = \frac{x_1}{x_0} \text{ e } y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Tomemos uma reta r de K^2 com equação cartesiana $a + bx + cy = 0$. Portanto, a imagem inversa $\phi_0^{-1}(r)$ corresponde aos pontos de U_0 da forma $[x_0 : x_1 : x_2]$ para os quais

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0. \tag{2.2}$$

Esta equação descreve um conjunto de pontos de $\mathbb{P}^2(K)$ que contém $\phi_0^{-1}(r)$. Naturalmente, se $[x_0 : x_1 : x_2]$ é solução da equação e $x_0 \neq 0$ então é claro que $(x_1/x_0, x_2/x_0) \in r$. No entanto, se $x_0 = 0$ então temos $bx_1 + cx_2 = 0$,

[2]Nunca é demais reforçar o ponto de que o termo "plano" no nome deste espaço vem do fato dele possuir dimensão 2, e não do fato dele representar as retas pela origem de K^2. Na verdade, o plano projetivo representa as retas pela origem de K^3.

que possui como solução o ponto de coordenadas homogêneas $[0 : -c : b]$. Logo, o conjunto de pontos de $\mathbb{P}^2(K)$ que satisfazem a equação (2.2) é igual a $\phi_0^{-1}(r) \cup [0 : -c : b]$. Qualquer conjunto de pontos de $\mathbb{P}^2(K)$ que satisfaz uma equação da forma da equação (2.2) é chamado de *reta projetiva.*

Consideremos agora uma outra reta s paralela a r. Esta reta terá equação $a'+bx+cy=0$. A reta projetiva correspondente é dada por $a'x_0+bx_1+cx_2=0$. Se tentarmos calcular o ponto de interseção entre as duas retas projetivas, veremos tratar-se de um sistema com 3 incógnitas e 2 equações. Logo, a solução possui dimensão 1, isto é, trata-se de um ponto projetivo. Subtraindo uma equação da outra, obtemos $(a-a')x_0 = 0$. Como $a \neq a'$, temos $x_0 = 0$. Mas já sabemos que a reta da equação (2.2) contém apenas 1 ponto cuja coordenada x_0 é nula, que é $[0 : -c : b]$. Logo, este tem que ser o ponto de interseção das duas retas.

Mostramos assim que duas retas projetivas paralelas se encontram em um ponto. No entanto, este ponto não pertence a U_0, e por isso não é identificável com nenhum ponto de K^2. Introduzimos então o conceito de *ponto projetivo no infinito.* Dizemos que todo ponto projetivo cuja coordenada x_0 é nula é um ponto no infinito. Como $x_0 = 0$ é uma equação da forma da equação (2.2), o conjunto destes pontos constitui uma reta projetiva, chamada de *reta no infinito* de $\mathbb{P}^2(K)$ e denotada por L_∞. Provamos assim a validade da velha frase de que "duas retas paralelas se encontram no infinito". Mostramos também que, no plano projetivo, todas as retas, paralelas ou concorrentes, se encontram sempre em um ponto.

Capítulo 3

Campos de Retas e Formas Diferenciais

"Mathematics is the language of nature." - Sean Gullette em "Pi"

"The only good is knowledge and the only evil is ignorance." - Sócrates

Neste capítulo, iremos utilizar os conceitos expostos no capítulo anterior para definir campos de retas e estudar algumas de suas propriedades. Um de nossos objetivos será determinar como descrever estes campos de maneira algébrica.

3.1 Definição e Exemplo de Campos de Retas

No capítulo anterior, aprendemos como construir o espaço projetivo do espaço K^n, denotado por $\mathbb{P}^{n-1}(K)$. Com isto, encontramo-nos em condições de definir formalmente um campo de retas. Seja U um aberto de K^n. Um *campo de retas* definido em U é uma aplicação contínua $G : U \to \mathbb{P}^{n-1}(K)$.

Uma outra denominação para estes campos é *campos de direção de dimensão um*.

Uma vez que toda reta pode ser definida por um vetor diretor, podemos definir um campo de retas a partir de um campo de vetores. Porém, para que uma definição deste tipo possa fazer sentido, é necessário que o campo de vetores não se anule em nenhum ponto, uma vez que o vetor nulo não define nenhuma reta pela origem.

De uma maneira geral, os pontos em que um campo ou uma curva apresentam comportamento indefinido, como pontos em que o campo de vetores se anula, ou pontos em que a curva não apresenta uma tangente bem definida, são chamados de *singularidades* do campo ou da curva. A partir deste conceito, podemos reescrever a condição do parágrafo acima da seguinte forma: para que um campo de retas possa ser definido a partir de um campo de vetores, é necessário que este campo de vetores não possua singularidades.

Assim, se U é um aberto de K^n e $F : U \to K^n$ é um campo de vetores contínuo e não singular, então o campo de retas $\mathcal{R}_F : U \to \mathbb{P}^{n-1}(K)$ correspondente a F é definido pela regra $\mathcal{R}_F(p) = [F(p)]$. Dizemos que $\mathcal{R}_F$ é o campo de retas *induzido* pelo campo de vetores F. Dizemos também que F é o campo de vetores *dual* a $\mathcal{R}_F$ e vice-versa.

Como exemplo, seja U um aberto de K^n e $g : U \to K$ uma função. Se $\nabla g(p) \neq 0$ para todos os pontos $p \in U$, então o campo gradiente é não singular em U. Portanto, podemos definir um campo de retas em U por

$$\mathcal{R}_{\nabla g}(p) = [\nabla g(p)] = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(p) : \ldots : \frac{\partial g}{\partial x_n}(p)\right],$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são as coordenadas de K^n.

Supondo $n = 2$, seja T_g o campo de vetores

$$T_g = (\partial g/\partial x_2, -\partial g/\partial x_1).$$

Este vetor foi escolhido porque $T_g(p) \cdot \nabla g(p) = 0,$ para todo $p \in U$ e uma vez que $\nabla g(p) \neq 0,$ para todo $p \in U$, temos que $T_g(p) \neq 0,$ para todo $p \in U$. Podemos obter então o seguinte campo de retas:

$$\mathcal{R}_{T_g}(p) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}(p) : -\frac{\partial g}{\partial x_1}(p) \right].$$

Mas, conforme foi visto no capítulo anterior, o gradiente é perpendicular às curvas de nível de g em todos os seus pontos. Portanto, para cada $k \in K$, $\mathcal{R}_{\nabla g}$ é um campo de retas normais e $\mathcal{R}_{T_g}$ um campo de retas tangentes à curva de equação $g = k$.

3.2 Campos de Retas no Plano

No capítulo anterior, vimos como representar a equação de uma reta no plano através da linguagem de funcionais. Agora, vamos estender estes resultados a campos de retas. A questão principal a ser tratada está no fato de que a reta associada a um ponto por um campo $G : U \to \mathbb{P}^1$ muda para cada ponto p escolhido no aberto $U \subset K^2$. Por isso, o funcional que define $G(p)$ vai mudar à medida em que p varia em U. Devido a isso, precisamos considerar uma aplicação

$$\omega : U \to (K^2)^*,$$

que a cada ponto p de U associa um funcional ω_p que define a reta $G(p)$. Como os coeficiente de ω_p dependem de p, podemos escrever

$$\omega_p = a(p)dx + b(p)dy,$$

usando a notação introduzida no capítulo anterior. Como os coeficientes $a(p)$ e $b(p)$ dependem de p, podemos pensar em a e b como funções de U em K. Desta forma,

$$\omega_{(x,y)} = a(x,y)dx + b(x,y)dy.$$

Se as funções $a, b : U \to K$ forem contínuas, diremos que ω é uma *1-forma contínua* e se forem diferenciáveis, ω será uma *1-forma diferencial.*

Antes de seguir em frente, é necessário mostrar qual a relação entre as funções a e b que determinam a forma ω e a definição de campo de retas de que partimos. Primeiramente, é necessário lembrar que uma reta é definida pelo anulamento de um funcional. Ou seja, temos que a reta $G(p)$ pertencente ao campo G é definida pelo anulamento de ω_p, ou, dizendo de outra forma, $G(p) = [u]$ se, e somente se, $\omega_p(u) = 0$.

Supondo que $\omega_p = a(p)dx + b(p)dy$ é não nula, u deve ser um múltiplo constante do vetor $(-b(p), a(p))$. Isto sugere que podemos construir o campo de retas em duas etapas. Em primeiro lugar, construímos um campo de vetores $F : U \to K^2$ a partir de ω, tomando $F(p) = (-b(p), a(p))$. O campo de retas desejado será $\mathcal{R}_F$.

Esta construção sugere também uma outra maneira de olharmos para a forma ω. Da mesma maneira que a equação cartesiana da reta $ax + by = 0$ é determinada pelo vetor (a, b) normal à reta, a forma ω que representa o campo de retas G é determinada pelo vetor $(a(p), b(p))$ normal à reta $G(p)$.

Vimos que, dada uma 1-forma, é fácil determinar o campo de retas correspondente a ela. Infelizmente, inverter este processo não é possível. Isto é, dado um campo de retas contínuo, não é verdade que sempre podemos achar uma forma contínua que define este campo. O empecilho está no fato de que a construção só funciona para campos de retas induzidos por campos de vetores, e isto não é verdade para todos os campos de retas.

Tratemos agora de um exemplo muito importante. Seja $f : U \to K$ uma função diferenciável e considere o campo de vetores $T_f : U \to K^2$ dado por

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

Como vimos na seção anterior, este campo é tangente a uma curva de nível $f = c$, qualquer que seja a constante $c \in K$. O campo de retas correspondente é dado pela 1-forma

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Esta 1-forma é conhecida como a *diferencial de* f e denotada por df. É interessante pensar em df como o correspondente nos campos de retas ao gradiente nos campos de vetores. No entanto, df define um campo de retas *tangentes* a $f = c$, enquanto ∇f define um campo de vetores *normais* a $f = c$.

3.3 Campos Tangentes

Como será visto mais adiante, uma questão central deste trabalho é achar campos de retas tangentes à curvas e vice-versa. Assumiremos que as curvas em questão são curvas de nível de uma dada função.

Seja U um aberto de K^2 e $f : U \to K$ uma função diferenciável. Queremos determinar uma condição que nos permita dizer se um campo de retas é ou não tangente a uma curva de nível $f = c$. Para isto, iremos assumir que o campo de retas está definido em U por uma 1-forma $\alpha = adx + bdy$. Além disso, iremos assumir, para efeito de simplificação, que $\alpha_p \neq 0$ e que $df_p \neq 0$ para todo $p \in U$. Assim, o campo de retas estará bem definido em todo U e a curva possuirá uma tangente bem definida em todos os seus pontos.

O que queremos é que o campo de retas definido por α seja tangente à curva $f = c$ em todos os pontos desta. Contudo, a reta tangente a $f = c$ em um ponto p é unicamente determinada por df_p. Logo, pelo resultado 2.1 da página 12, α será tangente a $f = c$ em p se, e somente se,

$$\alpha_p \wedge df_p = 0.$$

É importante notar que precisamos considerar o produto exterior acima para cada ponto p da curva $f = c$. Isto é,

$$(\alpha \wedge df)_p = 0 \text{ para todo } p \text{ tal que } f(p) = c.$$ [1]

[1] Deve-se prestar atenção ao fato de que o produto exterior não precisa ser nulo em todos os pontos de U, mas apenas nos pontos pertencentes à curva de nível dada.

O produto exterior de duas 1-formas é conhecido como uma 2-forma.

Existe um teorema que nos permite explorar em mais detalhes o resultado acima. Ele é o *Teorema dos Zeros de Hilbert* e é enunciado abaixo em uma de suas formas:

Teorema 3.1. *Sejam c e h dois polinômios. Se $c = 0$ sempre que $h = 0$, então $c^n = hq$, para algum $n \in \mathbb{N}_+^*$ e algum polinômio q. Além disso, caso todos os fatores de h tenham multiplicidade 1, então $n = 1$.*

O teorema acima pode ser estendido para 2-formas em 2 variáveis. Se $\alpha = a_1 dx + b_1 dy$ e $\beta = a_2 dx + b_2 dy$, então a 2-forma $\alpha \wedge \beta$ pode ser escrita como

$$(\alpha \wedge \beta) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, dx \wedge dy = c(x, y)\, dx \wedge dy,$$

uma vez que $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$. Portanto, toda 2-forma em 2 variáveis é igual a um polinômio que multiplica $dx \wedge dy$. Desta maneira, se α é uma 2-forma em 2 variáveis e f é um polinômio em que todos os fatores possuem multiplicidade 1 (polinômio *reduzido*), temos o seguinte resultado, derivado do Teorema dos Zeros de Hilbert:

Resultado 3.2. *Se $\alpha = 0$ sempre que $f = 0$, então $\alpha = f\eta$, para alguma 2-forma η.*

É possível mostrar que se um campo possui uma curva de nível $f = 0$ que é tangente ao campo em todos os seus pontos, então o campo possui uma curva de nível $g = 0$ que também é tangente ao campo em todos os seus pontos, sendo g formado a partir do produto dos fatores distintos de f, todos com multiplicidade 1 em g. Portanto, se o campo de retas α possuir alguma curva de nível tangente ao campo em todos os seus pontos, então a seguinte relação será válida para algum f e algum η:

$$(\alpha \wedge df) = f\eta.$$

Capítulo 4

Folheações do Plano Projetivo

"All truth passes through three stages. First, it is ridiculed. Second, it is violently opposed. Third, it is accepted as being self-evident." - Arthur Schopenhauer

"O conhecimento torna a alma jovem e diminui a amargura da velhice. Colhe, pois, a sabedoria. Armazena suavidade para o amanhã." - Leonardo da Vinci

Neste capítulo, discutiremos alguns fatos básicos a respeito das folheações do plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, ou simplesmente $\mathbb{P}^2$, de uma maneira que seja apropriada para as aplicações subseqüentes.

Da mesma maneira que retas em $\mathbb{P}^2$ foram definidas como a imagem inversa de retas em $\mathbb{C}^2$ por ϕ_0^{-1} na subseção 2.3.3, podemos definir campos de retas em $\mathbb{P}^2$ a partir de campos de retas em $\mathbb{C}^2$. Seja $\omega = adx + bdy$ uma 1-forma polinomial que define um campo de retas em $\mathbb{C}^2$. Considerermos

$$\phi = \phi_z : U_z \to \mathbb{C}^2$$

$$[x : y : z] \to \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Então,

$$\phi^{-1}(\omega) = a\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)\left(\frac{dx}{z} - \frac{xdz}{z^2}\right) + b\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)\left(\frac{dy}{z} - \frac{ydz}{z^2}\right),$$

uma vez que

$$d\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{\partial(x/z)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial(x/z)}{\partial z}\, dz \text{ e}$$
$$d\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{\partial(y/z)}{\partial y}\, dy + \frac{\partial(y/z)}{\partial z}\, dz.$$

Denotando por a^h e b^h as homogeneizações de a e b com relação a z, temos

$$\phi^{-1}(\omega) = \frac{1}{z^{k+2}}\, a^h(x, y, z)(zdx - xdz) + \frac{1}{z^{m+2}}\, b^h(x, y, z)(zdy - ydz),$$

onde $k = \deg(a)$ e $m = \deg(b)$. Há 3 casos a analisar:

PRIMEIRO CASO: $k > m$

Neste caso,

$$\phi^{-1}(\omega) = \frac{1}{z^{k+2}}\, (za^h dx + z^{k-m+1} b^h dy - (xa^h + yz^{k-m} b^h)dz).$$

Como queremos que o campo de retas seja polinomial e esteja definido em todo $\mathbb{P}^2$, consideramos o campo definido pela 1-forma

$$\Omega = Adx + Bdy + Cdz = za^h dx + z^{k-m+1} b^h dy - (xa^h + yz^{k-m} b^h)dz.$$

A partir disto, verificamos facilmente que $Ax + By + Cz = 0$.

SEGUNDO CASO: $m > k$

Este caso é inteiramente análogo ao anterior. Em particular, a igualdade

$Ax + By + Cz = 0$ se mantém verdadeira.

TERCEIRO CASO: $k = m$

Neste caso,

$$\phi^{-1}(\omega) = \frac{1}{z^{k+2}} \left(za^h dx + zb^h dy - (xa^h + yb^h) dz\right).$$

Temos então dois subcasos:

Subcaso 1: $xa^h(x, y, 0) + yb^h(x, y, 0) \neq 0$

Neste caso,

$$\Omega = za^h dx + zb^h dy - (xa^h + yb^h) dz.$$

Subcaso 2: $xa^h(x, y, 0) + yb^h(x, y, 0) = 0$

Neste caso, podemos por z em evidência e cancelá-lo com o denominador, de modo que

$$\Omega = a^h dx + b^h dy - \Delta dz,$$

onde

$$\Delta = \frac{xa^h + yb^h}{z}.$$

A igualdade $Ax + By + Cz = 0$ é verdadeira em ambos os subcasos.

Agora que vimos como construir campos de retas em $\mathbb{P}^2$ a partir de campos de retas em $\mathbb{C}^2$, podemos ir adiante e definir o que é uma *folheação do plano projetivo*. Seja $n \geq 0$ um inteiro. Uma *folheação holomorfa* $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2$ é definida por uma 1-forma $\Omega = Adx + Bdy + Cdz$, onde A, B e C são polinômios homogêneos de grau $n + 1$ que satisfazem a identidade $xA + yB + zC = 0$. Uma *singularidade* de $\mathcal{F}$ é um zero comum a A, B e C. O conjunto das singularidades de $\mathcal{F}$ é denotado por $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ ou $\mathrm{Sing}(\Omega)$. Se $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ é um conjunto finito, dizemos que $\mathcal{F}$ é *saturada*.

De agora em diante, lidaremos somente com a folheação de $\mathbb{C}^2$ definida pela 1-forma $\omega = adx + bdy$, onde $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$. Note que se Ω for definido como acima, então $a(x, y) = A(x, y, 1)$ e $b(x, y) = B(x, y, 1)$. Assumiremos também que ω é *saturada*, o que significa $mdc(a, b) = 1$. Uma *singularidade* de ω é um zero comum a a e b. O conjunto das singularidades de ω é denotado por $\operatorname{Sing}(\omega)$. Segue do Teorema de Bézout que este é um conjunto finito, porque estamos assumindo que ω é saturada. No entanto, $\operatorname{Sing}(\omega)$ não precisa ser igual a $\operatorname{Sing}(\Omega)$. Os dois conjuntos coincidem somente se $\operatorname{Sing}(\Omega)$ não intersecta a reta no infinito L_∞. De fato, neste caso, como os zeros de A e B são todos pontos com $z \neq 0$, todo zero de A e de B é também um zero de C porque $xA + yB + zC = 0$. Daqui para frente, assumiremos que as coordenadas de $\mathbb{P}^2$ foram escolhidas de tal forma que $\operatorname{Sing}(\Omega) \cap L_\infty = \emptyset$.

Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$ um polinômio reduzido, isto é, um polinômio em que todos os seus fatores possuem multiplicidade 1. Consideremos a curva algébrica C definida pelo anulamento de f. Dizemos que C é *invariante* sob a folheação $\mathcal{F}$, se C é tangente ao campo de retas definido por ω em todos os pontos fora de $\operatorname{Sing}(C)$ e $\operatorname{Sing}(\omega)$. Já vimos no capítulo anterior que caso exista uma curva de nível de um polinômio que é tangente ao campo em todos os seus pontos não singulares, então sempre existirá uma curva de nível de um polinômio reduzido que também será tangente ao campo em todos os seus pontos não singulares. Logo, o caso em que f é um polinômio reduzido é o único que merece nossa atenção. Vimos também, no capítulo anterior, que a condição para f ser invariante sob a folheação é equivalente à existência de uma 2-forma polinomial η tal que

$$\omega \wedge df = f\eta.$$

A curva C também é chamada de *solução algébrica* de $\mathcal{F}$ (ou ω). Com algum abuso da notação, também podemos dizer que f é invariante sob ω.

Podemos perceber que em todos os casos de campos de retas definidos em $\mathbb{P}^2$, com a exceção do subcaso 2 do terceiro caso analisado acima, a reta no infinito $z = 0$ é uma solução algébrica da folheação, uma vez que em todos estes casos temos

$$\omega \wedge dz = z\eta.$$

Uma vez que o objetivo desta monografia é encontrar exemplos de folheações sem solução algébrica, iremos nos preocupar apenas com o terceiro caso analisado acima, em que a e b possuem o mesmo grau. No entanto, apenas a garantia de que os dois possuem o mesmo grau não é suficiente. Temos que testar também se o polinômio $xa^h(x,y,0) + yb^h(x,y,0)$ é identicamente nulo (segundo subcaso), pois caso contrário a folheação certamente possui uma solução algébrica (a reta no infinito). No caso em que $xa^h(x,y,0) + yb^h(x,y,0)$ é de fato identicamente nulo, como $a^h(x,y,0) = A(x,y,0)$ e $b^h(x,y,0) = B(x,y,0)$ são iguais aos componentes homogêneos líderes de a e b (a_{n+1} e b_{n+1}, respectivamente), concluímos que

$$a = yh + a_0 \ \text{ e } \ b = -xh + b_0,$$

onde a_0 e b_0 são polinômios de grau menor ou igual a n e h é homogêneo de grau n. Em particular,

$$deg(a) = deg(b) = n + 1.$$

O número n é chamado de *grau* de ω. Dizemos também que n é o grau da folheação $\mathcal{F}$ definida por ω em $\mathbb{P}^2$.

A próxima proposição caracteriza que tipo de curva invariante podemos esperar que uma 1-forma ω com coeficientes racionais tenha. Para uma prova desta proposição, consulte [8, proposição 3.3, p. 36].

Proposição 4.1. *Se ω tem uma solução algébrica, então existe um polinômio reduzido com coeficientes racionais que é invariante sob ω.*

Vamos definir agora o que são *expoentes característicos*, que terão um papel importante em ambos os algoritmos apresentados mais adiante nesta dissertação. Seja $p \in \mathrm{Sing}(\omega)$. O *jacobiano* no ponto p do campo de vetores dual a ω é

$$J_\omega(p) = \begin{bmatrix} \partial b/\partial x & \partial b/\partial y \\ -\partial a/\partial x & -\partial a/\partial y \end{bmatrix}$$

Dizemos que $\mathcal{F}$ é *não degenerada* em p se $\det(J_\omega(p)) \neq 0$. Neste caso, os autovalores λ_1 e λ_2 de $J_\omega(p)$ são ambos diferentes de zero, e o quociente λ_1/λ_2 e seu inverso são os *expoentes característicos* de ω em p. Seja

$$\rho_\omega(p) = \frac{\text{traço}(J_\omega(p))^2}{\det(J_\omega(p))}.$$

Um cálculo simples mostra que $\rho_\omega(p)$ está relacionado com os expoentes característicos pela fórmula

$$\rho_\omega(p) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2. \tag{4.1}$$

O conjunto de todos os números complexos que são expoentes característicos de $\mathcal{F}$ em alguma de suas singularidades será denotado por $\text{Exp}(\mathcal{F})$ ou $\text{Exp}(\omega)$.

Para uma prova da próxima proposição, consulte [5, proposição 4.1, p. 126] e [9, lema 5.1, p. 156].

Proposição 4.2. *Se C é uma curva algébrica reduzida invariante sob ω, então $Sing(\omega) \cap C \neq \emptyset$. Se além disso, $Exp(\omega) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, então todas as singularidades de C são nós.*

O que a primeira parte da proposição acima nos diz é que se uma curva algébrica é invariante sob a folheação, então ela tem que passar por pelo menos uma singularidade da folheação. A segunda parte da proposição nos diz que caso nenhum dos expoentes característicos da folheação seja racional, então todas as singularidades da curva são de um tipo específico, chamado nó. Um nó é um ponto duplo onde a curva tem exatamente duas tangentes distintas.

A próxima hipótese será válida no restante do capítulo.

Hipótese 4.3. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{P}^2$ determinada pela 1-forma $\omega = adx + bdy$, onde $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$ e assuma que $Sing(\mathcal{F}) \cap L_\infty = \emptyset$.*

Dado um ponto singular $p \in \mathbb{C}^2$ de ω, seja $V_{p,\lambda}$ o espaço de autovetores de λ com respeito à matriz $J_\omega(p)$. Se C é uma curva algébrica reduzida invariante sob ω e ω é não degenerada em todos os pontos $p \in \text{Sing}(\omega)$, então podemos construir o conjunto

$$\mathrm{Exp}(\omega, C) = \{\lambda_1/\lambda_2 \in \mathrm{Exp}(\omega) : V_{p,\lambda_2} \cap T_pC \neq 0 \text{ para algum } p \in \mathrm{Sing}(\omega) \cap C\}.$$

O próximo teorema é uma consequência imediata do Teorema do Índice de Camacho-Sad. Para maiores detalhes, consulte [10, Teorema 2, p. 37].

Teorema 4.4. *Seja C uma curva algébrica reduzida de grau d invariante sob ω. Se as únicas singularidades de C são nós e ω é não degenerada em todos os pontos $p \in Sing(\omega)$, então*

$$\sum_{q \in Exp(\omega, C)} q = d^2 - 2\delta$$

onde δ é o número de nós de C.

O resultado final deste capítulo, originalmente provado por Darboux, é um corolário do teorema de Baum-Bott [11, Teorema 1, p. 280]. Para uma prova direta deste caso especial, consulte [12, Teorema 1.1, p. 150] ou [10, Teorema 1, p. 34]. Antes de enunciarmos o teorema, precisamos introduzir uma notação. Se p é uma singularidade de ω, definimos a *multiplicidade* $\mu_p(\omega)$ de ω em uma singularidade p como o número de interseção de a e b em p. Em outras palavras, a multiplicidade $\mu_p(\omega)$ é o número de vezes em que a curva $a = 0$ intersecta a curva $b = 0$ em p. Em particular, $\mu_p(\omega) = 1$ se, e somente se, ω é não degenerada em p.

Teorema 4.5. *Seja ω uma 1-forma de grau n que satisfaz $Sing(\omega) \cap L_\infty =$*

$\emptyset$. *Então*

$$\sum_{p \in Sing(\omega)} \mu_p(\omega) = n^2 + n + 1. \tag{4.2}$$

Se além disso ω *for não degenerada em todas as suas singularidades, então*

$$\sum_{p \in Sing(\omega)} \rho_\omega(p) = (n+2)^2. \tag{4.3}$$

O seguinte resultado é uma conseqüência imediata do teorema acima que será muito útil mais adiante nesta dissertação.

Corolário 4.6. *Seja* ω *uma 1-forma de grau* n *que satisfaz* $Sing(\omega) \cap L_\infty = \emptyset$. *Então,* ω *possui* $n^2 + n + 1$ *singularidades, contadas com multiplicidade, todas as quais pertencem ao aberto* $z \neq 0$.

Capítulo 5

O Primeiro Algoritmo

"Outside of a dog, a book is man's best friend. Inside of a dog it's too dark to read." - Groucho Marx

"Ler fornece conhecimento à mente. Pensar incorpora o que lemos." - John Locke

Neste capítulo, iremos finalmente apresentar o primeiro de dois algoritmos com o objetivo de estabelecer uma abordagem eficiente para o problema da determinação de folheações do plano projetivo sem solução algébrica. Para tanto, usaremos os conceitos discutidos até este ponto da dissertação. No entanto, um último conceito ainda se faz necessário: o conceito de bases de Gröbner. Na verdade, ambos os algoritmos se desenvolvem ao redor do cálculo destas bases. Portanto, começaremos este capítulo com uma breve explanação da teoria das bases de Gröbner.

5.1 Bases de Gröbner

No caso de um polinômio em uma variável, existe uma ordenação óbvia para os monômios. É a ordenação que coloca no polinômio os monômios em ordem decrescente de grau. Já no caso de polinômios em várias variáveis, não existe uma única ordenação óbvia. Na verdade, é possível ordenar os monômios de um polinômio em várias variáveis de dezenas de maneiras diferentes. Analisaremos esta questão no caso de polinômios em 2 variáveis (x, y), pois este é o nosso caso de interesse.

Para começo de conversa, precisamos estabelecer qual das duas variáveis é a mais significativa. Como exemplo, se x for a variável mais significativa, denotaremos isto por $x > y$. A ordenação monomial que irá nos interessar para o desenvolvimento dos dois algoritmos é chamada de *ordenação lexicográfica*. Por esta ordenação, ao analisarmos dois monômios $m_1 = x^{\alpha_1}y^{\beta_1}$ e $m_2 = x^{\alpha_2}y^{\beta_2}$, $m_1 > m_2$, isto é, m_1 aparece antes de m_2 no polinômio, se

$$\begin{cases} \alpha_1 > \alpha_2 \\ \text{ou} \\ \alpha_1 = \alpha_2 \ \text{ e } \ \beta_1 > \beta_2. \end{cases}$$

Esta ordem é chamada de lexicográfica porque nela interpretamos e ordenamos os monômios como palavras em um dicionário. Esta ordem é usualmente denotada por *lex*.

Um outro conceito importante para o entendimento da teoria das bases de Gröbner é o conceito de *ideal*. Um ideal de $K[x, y]$ é um subconjunto não vazio $I \subset K[x, y]$ que satisfaz

1. Se $f, g \in I$, então $f + g \in I$ e

2. Se $f \in I$ e $g \in K[x, y]$, então $fg \in I$.

O ideal gerado pelos polinômios a e b, denotado por (a,b) é o conjunto

$$(a,b) = \{f \in \mathbb{Q}[x,y] : f = q_1 a + q_2 b \text{ para algum } q_1, q_2 \in \mathbb{Q}[x,y]\}.$$

Todo ideal apresenta uma estrutura dual conhecida como *conjunto de zeros*. O conjunto de zeros do ideal (a,b) é formado pelas soluções do sistema de equações $a(x,y) = b(x,y) = 0$. A grosso modo, podemos dizer que o ideal é uma visão algébrica e o conjunto de zeros é uma visão geométrica de uma mesma estrutura.

Todos conhecem o processo de eliminação gaussiana para a resolução de sistemas de equações lineares. A partir deste processo, obtemos um sistema equivalente (com o mesmo conjunto de soluções) para o sistema original, sendo que o novo sistema é de mais simples resolução por estar em forma de escada. Existe um procedimento semelhante para o caso de sistemas de equações não lineares. Através de um método algorítmico, conhecido como *Algoritmo de Buchberger*, é possível calcular um sistema equivalente ao sistema original, sendo que aquele será também mais simples, assim como no caso linear. Sendo mais preciso, o sistema não linear equivale ao conjunto de zeros de algum ideal. O que o Algoritmo de Buchberger faz é encontrar um conjunto de geradores mais simples para este ideal. Como não estamos alterando o ideal, mas apenas encontrando outro conjunto de geradores, o conjunto de zeros também não se altera, isto é, o sistema resultante é equivalente ao original. Este novo conjunto de geradores do ideal, obtido após a aplicação do Algoritmo de Buchberger é conhecido como uma *Base de Gröbner*.

O cálculo da Base de Gröbner é dependente da ordem monomial que estiver sendo utilizada. Por isso, temos sempre que especificar em qual ordem estamos realizando os cálculos. A base de Gröbner de um ideal representado na ordem *lex* possui uma propriedade muito interessante para nossas aplicações. Iremos enunciá-la sob a forma de um resultado.

Resultado 5.1. *Seja $I = (a(x,y), b(x,y))$ um ideal e $\mathcal{Z}(I)$ o seu conjunto de zeros. Se I possuir* dimensão zero*, isto é, se $\mathcal{Z}(I)$ for formado por um conjunto finito de pontos, então a base de Gröbner G de I de acordo com a ordem* lex *com $y > x$ apresentará a forma $G = (g_1(x,y), g_0(x))$. Em geral, a base de Gröbner de um ideal de dimensão zero de acordo com a ordem* lex *com alguma ordenação arbitrária das variáveis apresentará a forma de escada, com um polinômio em função apenas da variável menos significativa.*

5.2 Fundamentação Matemática

Sejam a e b polinômios de grau $n+1$ em $\mathbb{Q}[x,y]$ e considere a 1-forma $\omega = adx + bdy$. Seja $g_0(x)$ a base de Gröbner do ideal $(a,b) \cap \mathbb{Q}[x]$. Devemos notar que os zeros deste ideal representam as abscissas das singularidades de ω. Suponha que g_0 seja irredutível de grau n^2+n+1. Estas duas condições implicam que a folheação induzida por ω possui n^2+n+1 singularidades distintas, todas as quais pertencem ao aberto $z \neq 0$. Além disso, L_∞ não pode ser invariante sob ω pela proposição 4.2, uma vez que a curva invariante deve passar por ao menos uma singularidade da folheação e a reta no infinito não contém nenhuma delas. Portanto, $xa_{n+1} + yb_{n+1} = 0$, como visto no capítulo anterior, na página 31.

A prova do próximo teorema segue de perto aquela em [4, Teorema, p. 90].

Teorema 5.2. *Seja g_0 a base de Gröbner do ideal $(a,b) \cap \mathbb{Q}[x]$. Se g_0 for irredutível sobre $\mathbb{Q}$ de grau n^2+n+1, então ω não possui nenhuma solução algébrica.*

Demonstração. Como g_0 é irredutível, segue que

$$\mathbb{Q}[x]/(g_0) \hookrightarrow \mathbb{Q}[x,y]/\sqrt{(a,b)}.$$

Mas,

$$n^2+n+1 = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[x]/(g_0)) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[x,y]/\sqrt{(a,b)}) \leq n^2+n+1,$$

logo ambas as álgebras possuem dimensão n^2+n+1 sobre $\mathbb{Q}$. Portanto,

$$\sqrt{(a,b)} = (g_0(x), y - g_1(x)).$$

Em particular, as singularidades de ω são da forma $(x_0, g_1(x_0))$, para alguma raiz complexa x_0 de g_0.

Seja G o Grupo de Galois de g_0 sobre $\mathbb{Q}$.[1] G mantém todos os elementos de $\mathbb{Q}$ parados. Como g_0 é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, segue que G age transitivamente no conjunto de raízes de g_0. Dizendo em outras palavras, se σ é um

[1] O Grupo de Galois de um polinômio f é um conjunto (grupo) de permutações das raízes de f. A maneira com que se constrói este grupo está além do escopo deste texto. No entanto, basta sabermos que as permutações que pertencem a este grupo são determinadas exclusivamente por características do polinômio f em questão. No caso em que f é irredutível, este grupo apresenta a interessante propriedade de agir transitivamente sobre as raízes de f, isto é, sempre é possível, através da composição de permutaçõs pertencentes ao grupo, partir de uma raiz de f e chegar em qualquer outra raiz de f.

elemento de G e x_0 é uma raiz de g_0, então $\sigma(x_0)$ também é uma raiz de g_0. Devido a isto, G também age transitivamente no conjunto $\text{Sing}(\omega)$, da seguinte maneira:

$$\sigma(x_0, g_1(x_0)) = (\sigma(x_0), g_1(\sigma(x_0))),$$

para $\sigma \in G$.

Assumimos agora que ω tem uma solução algébrica. Então, pela proposição 4.1, existe um polinômio $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ que é invariante sob ω. Como f e ω são ambos estáveis por G, segue da proposição 4.2 que

$$\text{Sing}(\omega) \subset \mathcal{Z}(f) = C.$$

Isto porque como pelo menos uma sigularidade de ω deve pertencer a C, então pelo menos uma singularidade de ω pertence a $\mathcal{Z}(f)$. Mas como G age transitivamente sobre as raízes de f e sobre as singularidades, então o fato de uma singularidade pertencer à curva implica que todas as outras singularidades também pertencerão à curva.

Precisamos analisar dois casos.

PRIMEIRO CASO: C é não singular em todos os pontos de $\text{Sing}(\omega)$.

Temos, por hipótese, que C é não singular em todas as singularidades de ω. Mas, sendo invariante sob ω, a curva não pode ser singular em nenhum outro lugar. Devido a isto, C é uma curva não singular. Logo, por [5, Proposição 4.1, p. 126], existe um polinômio homogêneo h e uma 1-forma homogênea η tal que

$$\Omega = hdF + F\eta, \tag{5.1}$$

onde F e Ω denotam as homogeneizações de f e ω com respeito a z. Levando em conta que os coeficientes de Ω possuem grau $n+1$, concluímos que $\deg(h)+\deg(F) = n+2$.

No entanto,

$$\mathrm{Sing}(\Omega) = \mathrm{Sing}(\omega) \subseteq \mathcal{Z}(F) = \overline{C},$$

que é a projetivização de C, isto é, a imagem de C no plano projetivo. Então, pela equação (5.1), hdF se anula em toda singularidade p de ω. Mas $\overline{C}$ é uma curva não singular, então $dF(p) \neq 0$ em todo $p \in \overline{C}$. Concluímos, então, que $h(p) = 0$ para todo $p \in \mathrm{Sing}(\Omega)$. Em particular,

$$\#(\overline{C} \cap \mathcal{Z}(h)) \geq n^2 + n + 1.$$

Entretanto, pelo Teorema de Bézout,

$$\#(\overline{C} \cap \mathcal{Z}(h)) = \deg(F)\deg(h) = \deg(F)(n + 2 - \deg(F)).$$

No entanto,

$$\deg(F)(n + 2 - \deg(F)) < n^2 + n + 1,$$

sempre que $\deg(F) \geq 2$ ($\deg(F) \leq n+1$, por [5, Proposição 4.1, p. 126]). Portanto, só nos sobra $\deg(F) = 1$. Mas todas as singularidades de ω são também zeros de a^h, a homogeneização do polinômio a com respeito a z, por definição. Como a^h possui grau $n+1$, segue do Teorema de Bézout que

$$n^2 + n + 1 \leq \deg(a^h)\deg(F) = \deg(a^h) = n + 1,$$

o que é uma contradição. Portanto, ω não pode ter uma curva invariante não singular.

SEGUNDO CASO: C é singular em algum ponto $p_0 \in \mathrm{Sing}(\omega)$.

Como f é singular em $p_0 \in \mathrm{Sing}(\omega)$, segue que $(\nabla f)(p_0) = 0$. Mas G age transitivamente em $\mathrm{Sing}(\omega)$ e f possui coeficientes racionais, então

$$0 = \sigma((\nabla f)(p_0)) = (\nabla f)(\sigma(p_0)).$$

Portanto, C é singular em todas as singularidades de ω.

Nos voltamos agora para algumas propriedades de ω. Já sabemos que ω possui $n^2 + n + 1$ singularidades distintas. Então, pelo teorema 4.5,

$$\mu_p(\omega) = 1, \text{ para todo } p \in \mathrm{Sing}(\omega).$$

Em particular, ω é não degenerada em todas as singularidades.

Como próximo passo, queremos mostrar que ω não possui nenhum expoente característico racional. Para fazer isto, consideramos o conjunto

$$R = \{\rho_\omega(p) : p \in \mathrm{Sing}(\omega)\}.$$

Se ω possui um expoente característico racional, então $R \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Contudo,

G age transitivamente em $\mathrm{Sing}(\omega)$, e como

$$\sigma(\rho_\omega(p)) = \rho_\omega(\sigma(p)),$$

segue que G age transitivamente em R. Logo, $R \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ implica que todos os elementos de R são números racionais. Mas números racionais são estáveis sob G, então $R = \{q\} \subset \mathbb{Q}$. Portanto, pelo teorema 4.5, concluímos que

$$(n^2 + n + 1)q = (n + 2)^2.$$

Em particular, se e e $1/e$ são os expoentes característicos correspondentes, encontramos

$$e = \frac{-n^2 + 2n + 2}{2(n^2 + n + 1)} + \frac{n(n + 2)}{2(n^2 + n + 1)} \cdot \imath\sqrt{3}.$$

Mas este não é um número racional. Logo, $\mathrm{Exp}(\omega) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

Portanto, pela proposição 4.2, todas as singularidades de $\overline{C}$ devem ser nós. Como $\overline{C}$ é reduzida, segue de [13, Problema 5-25] que

$$n^2 + n + 1 = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\omega)} \frac{m_p(m_p - 1)}{2} \leq \frac{n^2 + 3n + 2}{2},$$

onde m_p é a multiplicidade de $\overline{C}$ em p. Mas esta desigualdade implica que $n \leq 1$, o que é uma contradição, a não ser no caso do teorema 1.1, em que este resultado é plenamente verdadeiro. $\square$

Iremos isolar uma conseqüência da última parte da prova do teorema 5.2 para futura referência.

Corolário 5.3. *Seja ω uma 1-forma saturada e C uma curva algébrica reduzida de $\mathbb{C}^2$. Se*

- *$Sing(\omega) \subseteq Sing(C)$ e*
- *$Exp(\omega) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$,*

então C não pode ser invariante sob ω.

5.3 O Algoritmo

Nesta seção, apresentamos o primeiro algoritmo, que é uma conseqüência imediata do teorema da seção anterior. Após sua apresentação, damos alguns detalhes importantes de alguns de seus passos.

Algoritmo 5.4. *Dada uma 1-forma $\omega = adx + bdy$, onde $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$ são polinômios de grau $n+1$, o algoritmo retorna uma de três mensagens:* existe solução algébrica, não existe solução algébrica, ou não sei.

Passo 1 *Se $n = 1$, então pára e retorna* existe solução algébrica.

Passo 2 *Se* $\mathrm{mdc}(a, b) \neq 1$, *então pára e retorna* existe solução algébrica.

Passo 3 *Se o polinômio $xa_{n+1} + yb_{n+1}$ é não nulo, então pára e retorna* existe solução algébrica.

Passo 4 *Computa a Base de Gröbner $g_0(x)$ do ideal $(a, b) \cap \mathbb{Q}[x]$.*

Passo 5 *Se g_0 é redutível ou* $\deg(g_0) < n^2 + n + 1$, *então pára e retorna* não sei.

Passo 6 *Pára e retorna* não existe solução algébrica.

O primeiro passo é uma aplicação direta do teorema 1.1 que nos diz que no caso testado sempre haverá solução. O segundo e o terceiro passos testam as condições necessárias para a folheação ser saturada e não apresentar a reta no infinito como solução algébrica. Sem testar se essas condições são válidas, aplicar o algoritmo é pura perda de tempo. No quarto passo, calculamos através de Bases de Gröbner, o polinômio g_0 ao qual o teorema 5.2 faz referência e no quinto passo verificamos se as condições do teorema são satisfeitas para que possamos informar que a folheação não possui solução algébrica.

Em nossa implementação do algoritmo no Singular, utilizamos o algoritmo FGLM [14, exercício 2.2.8, p. 68], [15] para computar a base de Gröbner de (a, b) com respeito a ordem lexicográfica com $y > x$. O polinômio g_0 é um dos elementos desta base. O algoritmo FGLM utiliza álgebra linear em cojunto com o Algoritmo de Buchberger em uma ordem monomial mais rápida para o cálculo com maior eficiência de bases de Gröbner de ideais de dimensão zero na ordem *lex*. No passo 4, checamos se g_0 é irredutível utilizando um algoritmo de fatoração para polinômios de uma variável.

5.4 Uma Variante

Após desenvolvermos e testarmos o algoritmo da seção anterior, pensamos em um possível outro modo de realizar a mesma tarefa que o algoritmo 5.4 realiza, tendo esperanças de que esta variante apresentasse um desempenho superior ao algoritmo original.

A idéia por trás desta variante consiste em utilizar a resultante de a e b com relação a y ao invés da base de Gröbner de $(a, b) \cap \mathbb{Q}[x]$[2]. A resultante de dois polinômios $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$ com relação a y, denotada por $R_y(a, b)$, é um polinômio em $\mathbb{Q}[x]$ com a seguinte propriedade, enunciada como um resultado:

Resultado 5.5. *Sejam C_1 e C_2 curvas definidas por $a = 0$ e $b = 0$, respectivamente, onde $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$. Então, os pontos x_0 tais que $R_y(a, b)(x_0) = 0$ são as abscissas dos pontos de interseção de C_1 e C_2.*

A partir disto, concluímos que, se calcularmos a resultante dos polinômios a e b que definem a 1-forma $\omega = adx + bdy$, então as suas raízes serão as abscissas das singularidades de ω. No entanto, o polinômio g_0, calculado pelo algoritmo da seção anterior através de bases de Gröbner, também possui como raízes as abscissas das singularidades de ω. Vemos então que g_0 e $R_y(a, b)$ compartilham o mesmo conjunto de raízes. Contudo, g_0 e $R_y(a, b)$ não são necessariamente o mesmo polinômio, uma vez que as multiplicidades das raízes podem ser diferentes em cada um dos dois.

O fato de os dois polinômios não serem necessariamente iguais nos impede de substituir um pelo outro no algoritmo da seção anterior sem nenhum cuidado extra. Entretanto, neste caso, o impasse possui solução. Como o polinômio g_0 foi calculado através de bases de Gröbner, ele é um gerador de $(a, b) \cap \mathbb{Q}[x]$, isto é, todos os polinômios que pertencem a este ideal são múltiplos de g_0. Mas $R_y(a, b)$ pertence a este ideal, tanto que compartilha seu conjunto de raízes com g_0. Logo, g_0 divide $R_y(a, b)$.

[2] O método para o cálculo da resultante de dois polinômios está além do escopo deste texto.

Temos que analisar 3 casos do polinômio $R_y(a,b)$: ele pode ser irredutível, redutível com raízes distintas ou redutível com raízes repetidas. Se ele for irredutível ou redutível com raízes distintas, então ele tem que ser igual a g_0, uma vez que g_0 divide $R_y(a,b)$ e ambos compartilham o mesmo conjunto de raízes. Assim, nestes casos, o algoritmo terá sucesso ou falhará da mesma forma, sendo usado um ou outro polinômio. Já se $R_y(a,b)$ for redutível com raízes repetidas, então g_0 e $R_y(a,b)$ podem ser diferentes. Se o grau de g_0 for menor do que o grau de $R_y(a,b)$ (cujo grau máximo é n^2+n+1, que é o número máximo de singularidades de ω), o algoritmo falha para ambos (grau baixo para g_0 e redutibilidade para $R_y(a,b)$). Já se o grau de ambos os polinômios for igual, então os dois são iguais e falham da mesma maneira (por redutibilidade). Logo, o algoritmo retorna sempre a mesma resposta, seja usando g_0 ou $R_y(a,b)$.

Temos então a seguinte variante do algoritmo 5.4:

Algoritmo 5.6. *Dada uma 1-forma $\omega = adx + bdy$, onde $a, b \in \mathbb{Q}[x,y]$ são polinômios de grau $n+1$, o algoritmo retorna uma de três mensagens:* existe solução algébrica, não existe solução algébrica ou não sei.

Passo 1 *Se $n = 1$, então pára e retorna* existe solução algébrica.

Passo 2 *Se* $\mathrm{mdc}(a,b) \neq 1$, *então pára e retorna* existe solução algébrica.

Passo 3 *Se o polinômio $xa_{n+1} + yb_{n+1}$ é não nulo, então pára e retorna* existe solução algébrica.

Passo 4 *Computa a resultante $R_y(a,b)(x)$ dos polinômios a e b com relação a y.*

Passo 5 *Se* $R_y(a,b)$ *é redutível ou* $\deg(R_y(a,b)) < n^2+n+1$, *então pára e retorna* não sei.

Passo 6 *Pára e retorna* não existe solução algébrica.

Capítulo 6

O Segundo Algoritmo

"A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original." - Albert Einstein

"Um livro deve ser o machado que quebra o mar gelado em nós." - Franz Kafka

O algoritmo apresentado no capítulo anterior só irá funcionar quando as abscissas dos pontos singulares da 1-forma ω são raízes de um polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Embora seja esperado que esta condição seja satisfeita genericamente, não é difícil construir exemplos de 1-formas em que ela falha. No entanto, existe outro algoritmo, que é apresentado neste capítulo, baseado no teorema 4.4, que poderá funcionar mesmo nestes casos.

6.1 Fundamentação Matemática

Seja ω uma 1-forma com coeficientes racionais. Assuma que a hipótese 4.3 seja válida e que ω seja não degenerada em todas as suas singularidades. Considere o ideal

$$L = (a, b, t\det(J_\omega) - \text{traço}(J_\omega)^2)$$

de $\mathbb{Q}[x, y, t]$ e seja q o gerador de $L \cap \mathbb{Q}[t]$. Pela equação (4.1), os expoentes característicos de ω são necessariamente raízes do polinômio

$$\hat{q} = u^{n^2+n+1} q\left(u + \frac{1}{u} + 2\right).$$

O algoritmo depende do seguinte resultado.

Proposição 6.1. *Seja $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ um polinômio reduzido e seja C a curva definida por $f = 0$. Assuma que*

1. *ω é não degenerada em todas as suas singularidades,*
2. *q é reduzido de grau $n^2 + n + 1$,*
3. *q não possui nenhuma raiz racional e*
4. *C é invariante sob ω.*

Então, existe um subconjunto S do conjunto de fatores irredutíveis de $\hat{q}$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que Exp(ω, C) é o conjunto de todas as raízes de $\Phi = \Pi_{\phi \in S}\, \phi$.

Demonstração. Em primeiro lugar, devemos notar que se q é reduzido de grau $n^2 + n + 1$ sem nenhuma raiz racional, então $\hat{q}$ é reduzido de grau $2(n^2 + n + 1)$ e também não possui raízes racionais. Estas são as hipóteses sobre $\hat{q}$ que são utilizadas na prova da proposição.

Seja $j = 1, 2$. Denote por M_j o ideal dos menores 2×2 da matriz

$$\begin{bmatrix} J_\omega - v_j I \\ \nabla f \end{bmatrix},$$

e por Δ_j o determinante de $J_\omega - v_j I$. Considere os ideais

$$I_1 = (a, b, \Delta_1, \Delta_2, v_1 - uv_2, (v_1 - v_2)w - 1) \quad \text{e}$$

$$I_2 = (a, b, \Delta_1, M_2, v_1 - uv_2, (v_1 - v_2)w - 1)$$

de $\mathbb{Q}[x, y, v_1, v_2, u, w]$, e seja ρ_1 o gerador de $\sqrt{I_1} \cap \mathbb{Q}[u]$.

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são dois autovalores do jacobiano de ω na singularidade (x_0, y_0), então $u_0 = \lambda_1/\lambda_2$ é um expoente característico de ω e

$$(x_0, y_0, \lambda_1, \lambda_2, u_0, 1/(\lambda_1 - \lambda_2)) \in \mathcal{Z}(I_1),$$

o conjunto de zeros de I_1 em $\mathbb{C}^6$. Por [16, Lema 1, Capítulo 3, Seção 2, p. 121], todo elemento de $\mathrm{Exp}(\omega)$ é uma raiz de ρ_1. Logo, $\hat{q}$ divide ρ_1. Portanto,

$$\deg(\hat{q}) \leq \deg(\rho_1) \leq \dim(\mathbb{Q}[x, y, v_1, v_2, u, w]/\sqrt{I_1}) \leq 2(n^2 + n + 1).$$

Segue da hipótese sobre $\hat{q}$ que $\rho_1 = \hat{q}$ e que

$$\deg(\rho_1) = \dim(\mathbb{Q}[x, y, v_1, v_2, u, w]/\sqrt{I_1}) = 2(n^2 + n + 1).$$

Em particular, por [17, Teorema 3.7.23, p. 255], $\sqrt{I_1}$ está em posição geral com respeito a u (ou em u-posição normal, na terminologia de [17]).

Precisamos agora identificar os zeros de I_2. Suponha que

$$(x_0, y_0, \lambda_1, \lambda_2, u_0, w_0) \in \mathcal{Z}(I_2).$$

Então,

- $(x_0, y_0) \in \mathrm{Sing}(\omega)$,
- $u_0 = \lambda_1/\lambda_2$,
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$,
- λ_1 e λ_2 são autovalores de ω em (x_0, y_0) e
- $w_0 = 1/(\lambda_1 - \lambda_2)$.

Precisamos ainda investigar a condição imposta pelo ideal de menores M_2. Duas situações podem ocorrer. Se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, então o anulamento de M_2 implica que existe um autovetor $v \neq 0$ de λ_2 que é tangente a C. Por outro lado, se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, então f é singular em (x_0, y_0) e $T_pC = \mathbb{C}^2$. Em ambos os casos, $u_0 \in \mathrm{Exp}(\omega, C)$. Como a recíproca é claramente verdadeira, concluímos que

$$u_0 \text{ é uma coordenada } u \text{ de um ponto de } \mathcal{Z}(I_2)$$

$$\text{se, e somente se, } u_0 \in \mathrm{Exp}(\omega, C).$$

Como $I_1 \subseteq I_2$ e $\sqrt{I_1}$ está em posição geral em relação a u, segue que $\sqrt{I_2}$ também está. A partir disto, por [17, Teorema 3.7.25], um número complexo é uma coordenada u de um ponto de $\mathcal{Z}(I_2)$ se, e somente se, ele é uma raiz do gerador ρ_2 de $\sqrt{I_2} \cap \mathbb{Q}[u]$. Mas $I_1 \subseteq I_2$ implica que ρ_2 divide $\rho_1 = \hat{q}$. Como $\hat{q}$ é reduzido, o teorema está provado. $\square$

A estratégia agora consiste em mostrar que o teorema 4.4 não pode ser satisfeito por uma curva com coeficientes racionais. Entretanto, antes de fazer isto, precisamos determinar o número de nós de uma curva invariante sob ω. Suponha que C, $\hat{q}$ e Φ sejam como na proposição 6.1. Se C é singular, então, pela proposição 4.2, todas as suas singularidades são nós. Seja δ o número de nós de C. Dado um polinômio $\phi(u)$ em uma variável, seja

$$\tilde{\phi} = u^{\deg(\phi)}\phi(1/u).$$

Corolário 6.2. $\deg(\mathrm{mdc}(\Phi, \tilde{\Phi})) = 2\delta$.

Demonstração. Seja α um expoente característico de ω em $p \in \mathrm{Sing}(\omega)$. Então, p é um nó de C se, e somente se, ambos α e $1/\alpha$ pertencem a $\mathrm{Exp}(\omega, C)$. Mas isto é equivalente e α e $1/\alpha$ serem raízes de Φ. Portanto, o número de raízes de Φ, cujos recíprocos também são raízes de Φ é exatamente 2δ.

Por outro lado, α é raiz de Φ se, e somente se, $1/\alpha$ é raiz de $\tilde{\Phi}$. Portanto, α é raiz de $d = \mathrm{mdc}(\Phi, \tilde{\Phi})$ se, e somente se, ambos α e $1/\alpha$ são raízes de Φ. É claro que, neste caso, $1/\alpha$ é também uma raiz de d. A partir desta observação e do parágrafo anterior, concluímos que $\deg(d) = 2\delta$. $\square$

6.2 O Algoritmo

Apresentamos agora o segundo algoritmo, que é uma aplicação da proposição da seção anterior e do teorema 4.4.

Algoritmo 6.3. *Dada uma 1-forma $\omega = adx + bdy$, onde $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$ são polinômios de grau $n+1$, o algoritmo retorna uma de três mensagens:* existe solução algébrica, não existe solução algébrica ou não sei.

Passo 1 *Se $n = 1$, então pára e retorna* existe solução algébrica.

Passo 2 *Se* $\mathrm{mdc}(a, b) \neq 1$, *então pára e retorna* existe solução algébrica.

Passo 3 *Se o polinômio* $xa_{n+1} + yb_{n+1}$ *é não nulo, então pára e retorna* existe solução algébrica.

Passo 4 *Computa o gerador q de $L \cap \mathbb{Q}[t]$, onde*

$$L = (a, b, t\det(J_\omega) - \mathrm{traço}(J_\omega)^2)$$

Passo 5 *Se* $q = 0$ *ou* $\deg(q) < n^2 + n + 1$, *então pára e retorna* não sei.

Passo 6 *Se* $\mathrm{mdc}(q, dq/dt) \neq 1$, *então pára e retorna* não sei.

Passo 7 *Seja*

$$\hat{q} = u^{n^2+n+1} q\left(u + \frac{1}{u} + 2\right).$$

Passo 8 *Computa o conjunto T dos fatores de $\hat{q}$ sobre $\mathbb{Q}$.*

Passo 9 *Se T contém um polinômio de grau* 1, *então pára e retorna* não sei.

Passo 10 *Para todo subconjunto próprio $S \subsetneq T$ faz:*

Calcula o produto Φ_S de todos os polinômios em S.

Seja

$$\tilde{\Phi}_S = u^{\deg(\Phi_S)} \Phi_S(1/u).$$

Computa os coeficientes c_m e c_{m-1} de Φ_S, onde $m = \deg(\Phi_S)$, *e seja*

$$\beta(S) = -c_{m-1}/c_m + \deg(\mathrm{mdc}(\Phi_S, \tilde{\Phi}_S))$$

Se $\beta(S)$ é um inteiro e um quadrado perfeito, então pára e retorna não sei.

Passo 11 *Pára e retorna* não existe solução algébrica.

Demonstração. Assim como no algoritmo 5.4, os passos 1, 2 e 3 apenas checam se a folheação não recai no caso do teorema 1.1, se ela é saturada e se a reta no infinito não é invariante sob ω. Para aplicar a proposição 6.1, precisamos calcular o polinômio $\hat{q}$ (passos 4 e 7) e checar se ele satisfaz as hipóteses da proposição (passos 5, 6, 8 e 9). Note que, uma vez que precisaríamos fatorar $\hat{q}$ de qualquer forma, optamos por checar se ele, ao invés de q, possui alguma raiz racional.

Nos voltemos agora para o passo 10. Suponha que ω possua uma curva algébrica invariante. Logo, pela proposição 4.1, ela deve ter uma curva algébrica invariante C com coeficientes racionais. Mas então a proposição 6.1 implica que $\mathrm{Exp}(\omega, C)$ é igual ao conjunto de raízes de

$$\Phi_S = \prod_{\phi \in S} \phi = \sum_{j=0}^{m} c_j u^j,$$

onde S é um subconjunto do conjunto T de todos os fatores de $\hat{q}$. Note que podemos assumir que S é um subconjunto próprio de T, pois caso contrário C seria singular em todos os pontos de $\mathrm{Sing}(\omega)$, o que já foi excluído pelo corolário 5.3. Entretanto, como os expoentes característicos de ω não são racionais, segue do teorema 4.4 e do corolário 6.2 que a soma das raízes de de Φ_S é igual a $\deg(C)^2 - \deg(\mathrm{mdc}(\Phi_S, \tilde{\Phi}_S))$. Pela fórmula de Newton, esta soma é igual a $-c_{m-1}/c_m$. Logo,

$$\beta(S) = -c_{m-1}/c_m + \deg(\mathrm{mdc}(\Phi_S, \tilde{\Phi}_S))$$

precisa ser um inteiro e um quadrado perfeito. O passo 10 checa se esta hipótese é concretizada para algum subconjunto próprio S de T. Se não for, então ω não pode ter nenhuma curva algébrica invariante e a prova do algoritmo está completa. $\square$

Mesmo quando o algoritmo falha, ele provê informações sobre as possíveis soluções de ω. Seja C a curva com coeficientes racionais invariante sob ω. Então, $\deg(C)$ tem que ser um inteiro do conjunto $\{\sqrt{\beta(S)} : S \subsetneq T\}$. Além disso, as raízes do gerador de $(L, \Phi_S) \cap \mathbb{Q}[x]$ são as abscissas dos pontos de $\mathrm{Exp}(\omega, C)$. Uma vez que temos estas informações, é possível aplicar o método dos coeficientes indeterminados para encontrar as soluções.

Capítulo 7

Testes e Resultados

"A sabedoria é um adorno na prosperidade e um refúgio na adversidade." - Aristóteles

"Tudo o que é incompreensível, nem por isso deixa de existir." - Blaise Pascal

Os algoritmos apresentados nos capítulos 5 e 6 foram implementados no sistema de computação algébrica Singular [7]. Para a realização dos testes, utilizamos um micro-computador Intel Pentium 4 HT de freqüencia 2.8 GHz, com 512 MB de memória primária, sistema operacional Windows 2000 e Singular versão 2.0.5.

De agora em diante, assumiremos que todas as 1-formas ω de que estaremos falando são saturadas ($\mathrm{mdc}(a, b) = 1$) e podem ser escritas como

$$\omega = (yh + f)dx + (-xh + g)dy \tag{7.1}$$

onde $h \in \mathbb{Q}[x, y]$ é um polinômio homogêneo de grau n e $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ são polinômios de grau no máximo n. Isto equivale a dizer, como vimos no capítulo 4, que a folheação não possui a reta no infinito como solução algébrica. Estaremos também nos atendo a folheações de grau maior ou igual a 2. Estas medidas têm o objetivo de garantir que as folheações testadas não irão abortar nos 3 primeiros passos dos algoritmos. Em outras palavras, para as folheações testadas, os algoritmos possuem apenas duas opções de resposta: *não sei* ou *não existe solução algébrica*.

Neste caso, o primeiro algoritmo checa apenas se o sistema de equações polinomiais que definem as singularidades de ω está em posição geral com respeito a x, isto é, se todas as singularidades estão localizadas em abscissas distintas. No entanto, esta propriedade é verdadeira genericamente no conjunto de 1-formas que estamos considerando. Portanto, não é de nenhuma forma surpreendente que pares de polinômios densos gerados aleatoriamente do tipo

$$(yh + f, -xh + g) \tag{7.2}$$

quase sempre dêem origem a folheações que não possuem solução algébrica. De fato, **todos** os pares de polinômios densos da forma (7.2) que demos como entrada para o primeiro algoritmo retornaram *não existe solução algébrica*.

A tabela 7.1 nos mostra o tempo médio levado pelo primeiro algoritmo para provar que um dado par de polinômios densos da forma (7.2) está em posição geral em função do grau da folheação correspondente.

Os resultados da tabela 7.1 foram obtidos através da execução de um programa que gera 50 pares de polinômios densos da forma (7.2) para cada grau de folheação e computava o tempo de CPU médio gasto para checar que eles estavam em posição geral.

Para polinômios de grau maior do que 8, o teste se torna consideravel-

Grau da Folheação	Tempo Médio de Execução
2	10 ms
3	51,5 ms
4	434,7 ms
5	3,5 s
6	21,7 s
7	1 min e 49 s

Tabela 7.1: Tempo médio de execução do 1º algorimo para folheações de diversos graus definidas por polinômios densos (50 folheações por grau)

mente lento[1] para aplicá-lo a 100 polinômios. Por isso, para graus mais elevados, testamos apenas um par de polinômios densos da forma (7.2) para cada grau. Os tempos gastos para folheações de grau 8, 9, 10 e 11 estão na tabela 7.2.

Grau da Folheação	Tempo de Execução
8	7 min e 24 s
9	27 min e 38 s
10	85 min e 56 s
11	262 min e 34 s

Tabela 7.2: Tempo de execução do 1º algoritmo para folheações de graus mais elevados definidas por polinômios densos (1 folheação por grau)

A variante do primeiro algoritmo, como foi mostrado no capítulo 5, possui exatamente a mesma taxa de sucesso que o primeiro algoritmo em sua forma original. A única possível diferença entre os dois reside em seus desempenhos. Para avaliar esta diferença entre as duas formas do primeiro algoritmo, realizamos o mesmo teste, conforme explicado acima, para o algoritmo 5.6.

[1] Ao dizermos que o teste se torna lento, estamos levando em conta o referencial humano, em que o tempo necessário para testar 50 folheações de cada grau é considerado longo demais. No referencial da Computação Algébrica, um tempo de resposta da ordem de grandeza de horas, ou até mesmo dias, é considerado rápido em diversos problemas, não sendo o nosso uma exceção.

A tabela 7.3 nos mostra o tempo médio levado pela variante do primeiro algoritmo para provar que um dado par de polinômios densos da forma (7.2) está em posição geral em função do grau da folheação correspondente.

Grau da Folheação	Tempo Médio de Execução
2	2ms
3	16ms
4	20ms
5	31ms
6	47ms
7	94ms
8	234ms
9	470ms
10	750ms
11	1,4s
12	2,3s
13	4,3s
14	6s
15	9,7s
16	15s
17	25,5s
18	37s
19	52,3s
20	1min e 12s

Tabela 7.3: Tempo médio de execução da variante do 1º algorimo para folheações de diversos graus definidas por polinômios densos (50 folheações por grau)

A partir dos resultados mostrados na tabela 7.3, podemos concluir que esta variante tem a vantagem de apresentar um desempenho incrivelmente superior ao algoritmo original.

Se gerarmos polinômios esparsos, ao invés de densos, o algoritmo passa a falhar regularmente. Sabemos que a falha não se encontra nos 3 primeiros passos do algoritmo. Portanto, duas coisas podem estar acontecendo. Ou o polinômio $g_0(x)$ (do passo 4 do algoritmo 5.4) é redutível, ou ele possui grau menor do que $n^2 + n + 1$. Nenhuma das duas situações se mostrou claramente predominante. A tabela 7.4 nos mostra o percentual de pares de polinômios esparsos (que definem folheações de grau 3) da forma (7.2) que geraram a saída *não sei* no primeiro algoritmo de acordo com o percentual de seus coeficientes que foi igualado a zero. Foram testados 50 pares de polinômios esparsos para cada percentual. Podemos perceber, a partir desta tabela, que o percentual de falhas do algoritmo cresce quase que linearmente com o percentual de coeficientes iguais a zero no par de polinômios.

Coeficientes Iguais a Zero	Folheações que Retornam Indeterminado
0%	0%
20%	10%
30%	30%
50%	60%
70%	84%
80%	96%
90%	99%

Tabela 7.4: Porcentagem de folheações (de grau 3) que retornam resultado indeterminado no 1º algoritmo para diferentes percentuais de coeficientes iguais a zero nos polinômios que as definem (50 folheações por percentual)

Com o objetivo de investigar com maior profundidade por que o algoritmo estava falhando, checamos se a folheação possui alguma singularidade na reta no infinito $z = 0$. Como a tabela 7.5 mostra, isto é justamente o que ocorre na maioria dos casos. O algoritmo, portanto, mesmo no caso de polinômios esparsos, não está encontrando dificuldades devido ao fato da forma não estar em posição geral, mas sim pelo fato de algumas singularidades da folheação não estarem no plano complexo.

O segundo algoritmo é mais difícil de ser testado. Na verdade, como

Grau da Folheação	Número de Falhas	Número de Formas com Singularidades em L_∞	Número de Formas Fora de Posição Geral
2	6	4	2
3	15	12	3
4	13	9	4
5	14	12	2
6	16	13	3
7	13	8	5

Tabela 7.5: Análise mais profunda de folheações definidas por polinômios esparsos (50 folheações por grau, 30% dos coeficientes dos polinômios iguais a zero)

vimos, quase todos os pares de polinômios densos irão retornar um resultado positivo quando submetidos ao primeiro algoritmo. Por isso, nos voltamos para os polinômios esparsos. Infelizmente, a maioria dos pares que falham no primeiro algoritmo, também falham no segundo. Além disso, os poucos em que isto não acontece possuem coeficientes tão grandes que o Singular apresenta dificuldade em lidar com eles.

Contornamos este problema escrevendo um algoritmo que gera 1-formas para as quais o polinômio $g_0(x)$ (do passo 4 do algoritmo 5.4) é redutível. Mais precisamente, seja

$$a = -yx^n + g(x) \quad \text{e} \quad b = x^{n+1} - f(x,y),$$

onde $f(x,y)$ é um polinômio de grau n em $\mathbb{Q}[x,y]$ e $g(x)$ é um polinômio de grau no máximo n em $\mathbb{Q}[x]$. Suponha também que $f(0,y) \neq 0$. Se $a = 0$, então $y = g(x)/x^n$. Substituindo isso na equação $b = 0$, obtemos

$$R_y(a,b) = x^{n^2+n+1} - x^{n^2} f\left(x, \frac{g(x)}{x^n}\right) = 0, \tag{7.3}$$

que também pode ser calculado como a resultante de a e b em relação a y.

O algoritmo gera um polinômio redutível de grau n^2+n+1 e, comparando os coeficientes com (7.3), obtém a e b. A folheação resultante irá falhar no primeiro algoritmo por construção, sendo então testada com o segundo algoritmo.

O algoritmo funciona da seguinte forma:

- Entrada: $n \geq 2$ e uma partição de $n^2 + n + 1$.
- Para a partição $2 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_t$ faz:
  - Encontra primos distintos $p_1, \ldots, p_t$.
  - Constrói polinômios $f_1, \ldots, f_t$ mônicos e irredutíveis segundo o Critério de Eisenstein[2]. Para isto, os coeficientes de f_i (com a exceção do coeficiente do termo líder, que é 1) são construídos como produtos de p_i por números gerados aleatoriamente, sendo o termo independente igual a p_i.
  - Seja $F = f_1 \cdots f_t$.
  - Comparando coeficientes, como explicado acima, encontra (caso

[2]Critério de Eisentein: Seja $f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio em $\mathbb{Z}[x]$. Se existe um inteiro primo p, tal que p não divide a_n, p divide $a_{n-1}, \ldots, a_0$ e p^2 não divide a_0, então f é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

existam) polinômios a e b tais que

$$(a, b) \cap \mathbb{Q}[x] = (F).$$

- Aplica o segundo algoritmo à folheação definida por $adx + bdy$.

- Se o algoritmo obtiver sucesso, retorna a e b.

O algoritmo constrói o polinômio F orientando-se pelo Critério de Eisenstein de irredutibilidade. De fato, cada fator f_j é irredutível segundo Eisenstein, sendo então o polinômio F redutível e reduzido.

Utilizamos o algoritmo acima para gerar folheações de grau $n = 2$ e 3. Estabelecemos $g(x) = 1$ e $f(x, y)$ como o polinômio completo de grau n com coeficientes indeterminados. Isto é,

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \text{ (grau 2) e}$$

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j \text{ (grau 3).}$$

Com isso, obtemos os seguintes polinômios $R_y(a, b)$ que são usados na etapa de comparação de coeficientes do algoritmo:

$$R_y(a, b) = x^7 - ax^6 - dx^5 - fx^4 - bx^3 - ex^2 - c \text{ (grau 2) e}$$

$$R_y(a, b) = x^{13} - ax^{12} - ex^{11} - hx^{10} - jx^9 - bx^8 - fx^7 - ix^6 - cx^4 - gx^3 - d \text{ (grau 3).}$$

Como podemos ver, o polinômio $R_y(a, b)$ não é completo, o que nos leva à conclusão de que várias partições de $n^2 + n + 1$ testadas pelo algoritmo irão falhar, por produzirem polinômios com monômios ausentes em $R_y(a,b)$. Isso nos diz que devemos escolher as partições cuidadosamente. Para $n=2$, utilizamos as partições $(3,4)$ e $(2,2,3)$ de $n^2+n+1=7$. Já para $n=3$, utilizamos as partições $(3,4,6)$ e $(6,7)$ de $n^2+n+1=13$.

A partir destas partições, realizamos os testes com polinômios $R_y(a,b)$ da forma

$$(x^3+\alpha p_1 x^2+p_1)(x^4+\beta p_2 x^3+\gamma p_2 x^2+p_2) \text{ e} \tag{7.4}$$

$$(x^2+p_1)(x^2+p_2)(x^3+\alpha p_3 x^2+p_3) \text{ para } n=2 \tag{7.5}$$

e

$$(x^4+p_1)(x^6+\alpha p_2 x^4+p_2)(x^3+p_3) \text{ e} \tag{7.6}$$

$$(x^6+\alpha p_1 x^4+p_1)(x^7+\beta p_2 x^6+\gamma p_2 x^4+p_2) \text{ para } n=3, \tag{7.7}$$

onde p_1,p_2,p_3 são primos distintos e α,β,γ são inteiros gerados aleatoriamente. Foram testadas 100 folheações geradas a partir de 100 polinômios de cada uma das formas acima. Os resultados obtidos estão na tabela 7.6.

Forma de $R_y(a,b)$	Percentual de Sucesso	Tempo Médio
(7.4)	100%	125ms
(7.5)	100%	500ms
(7.6)	100%	1min
(7.7)	100%	10s

Tabela 7.6: Resultado dos testes realizados com o 2º algoritmo envolvendo folheações que falham no 1o algoritmo por construção, incluindo percentagem de sucesso e tempo médio de execução (100 folheações por forma de $R_y(a,b)$)

Podemos ver a partir dos resultados expostos na tabela 7.6, que o segundo algoritmo, apesar de mais lento que o primeiro, é capaz de detectar um grande número de folheações sem solução algébrica em que o primeiro algoritmo falha. Isto acontece porque o primeiro algoritmo só detecta folheações sem solução algébrica quando o grupo de Galois de $g_0(x)$ (do passo 4 do algoritmo 5.4) é capaz de permutar todas as singularidades da folheação entre si. Já o segundo algoritmo é capaz de detectar folheações sem solução algébrica em alguns casos em que isto não acontece (por $g_0(x)$ ser redutível).

Capítulo 8

Conclusões

"Se você tem uma laranja e troca com outra pessoa que também tem uma laranja, cada um fica com uma laranja. Mas se você tem uma idéia e troca com outra pessoa que também tem uma idéia, cada um fica com duas." - Confúcio

"A coisa mais indispensável a um homem é reconhecer o uso que deve fazer do seu próprio conhecimento." - Platão

Conforme o exposto na introdução deste trabalho, o teorema 1.2 nos diz que, ao sortearmos uma folheação genérica aleatoriamente entre todas as folheações de $\mathbb{P}^2$ com grau maior ou igual a 2, ela não terá solução algébrica com probabilidade 1[1]. Na prática, porém, são muito poucos os exemplos concretos de folheações sem solução algébrica. Uma vez que o teorema é matematicamente impecável e irrefutável, a falha só pode estar no fato de que não temos sido suficientemente espertos para encontrar novos exemplos deste tipo de folheação. Da mesma forma, não é satisfatório o fato de quase todos os exemplos conhecidos serem inspirados em um único exemplo de folheação, dado pelo próprio Jouanolou ao enunciar o teorema 1.2, que apresenta propriedades muito particulares. Isto é, não conseguimos obter um número

[1] Lembre-se que "probabilidade 1" e "evento certo" são coisas diferentes.

considerável de exemplos de folheações sem solução algébrica e os exemplos que temos, em sua maioria, não são suficientemente genéricos.

Este trabalho teve como objetivo desenvolver dois algoritmos com o poder de provar se uma dada folheação definida por uma 1-forma $\omega = adx + bdy$ não tem solução algébrica. A partir destes algoritmos, esperávamos conseguir obter exemplos de folheações razoavelmente genéricas sem solução algébrica. A maior dúvida se situava na performance computacional de ambos. No entanto, ela terminou por se mostrar satisfatória, superando largamente a abordagem algorítmica já estabelecida.

Como os testes experimentais mostram, o primeiro algoritmo irá provar que qualquer 1-forma suficientemente genérica do tipo (7.1) em $\mathbb{Q}[x, y]$ dá origem a uma folheação de $\mathbb{P}^2$ sem solução algébrica. Além disto, o algoritmo é bastante eficiente para folheações de grau até 7, retornando uma resposta em poucos segundos. A variante do primeiro algoritmo apresenta desempenho ainda melhor, chegando facilmente a folheações de grau 20. O segundo algoritmo, por outro lado, sofre de problemas sérios causados por explosão de coeficientes. Na verdade, ele tem boas chances de não retornar nenhum resultado para formas geradas aleatoriamente para as quais o primeiro algoritmo falha. Apesar disto, fomos capazes de construir exemplos em que o primeiro algoritmo falha, enquanto o segundo algoritmo detecta com sucesso que a folheação não possui solução algébrica.

Como trabalho futuro, não seria difícil desenvolver um algoritmo que, a partir dos dois algoritmos expostos nesta dissertação, construa famílias de folheações sem solução algébrica muito mais genéricas que as de Jouanolou.

Referências Bibliográficas

[1] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du* I$^{\text{o}}$ *ordre et du premier degré*, Bull. des Sc. Math. (Mélanges) (1878), 60–96, 123–144, 151–200.

[2] H. Poincaré, *Sur l'integration algébrique des équations differentielles du* 1$^{\text{er}}$ *ordre*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **11** (1891), 193–239. Reprinted in his *Oeuvres*, t. III, p. 35–58.

[3] M. N. Carnicer, *The Poincaré problem in the nondicritical case*, Ann. Math., **140**(1994), 289–294.

[4] D. Cerveau and A. Lins Neto, *Holomorphic foliations in* $\mathbf{CP}(2)$ *having an invariant algebraic curve*, Ann. Sc. de l'Institute Fourier, **41**, (1991), 883–903.

[5] J. P. Jouanolou, *Equations de Pfaff algébriques*, Lect. Notes in Math., 708, Springer-Verlag (1979).

[6] S. C. Coutinho and B. F. M. Ribeiro, *On holomorphic foliations without algebraic solutions*, Experimental Mathematics **10** (2001), 529–536.

[7] G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann, *Singular version 1.2 User Manual*, In *Reports On Computer Algebra*, number 21, Centre for Algebra, University of Kaiserslautern, June 1998, http://www.mathematik.uni-kl.de/~zca/Singular

[8] Y.-K. Man and M. A. H. MacCallum, *A rational approach to the Prelle-Singer algorithm*, J. Symb. Computation **24** (1997), 31–43.

[9] M. G. Soares, *On algebraic sets invariant by one-dimensional foliations of CP(3)*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 143–162.

[10] M. Brunella, *Birational geometry of foliations*, First Latin American Congress of Mathematicians, IMPA, Rio de Janeiro (2000).

[11] P. Baum and R. Bott, *Singularities of holomorphic foliations*, J. Diff. Geo. **7** (1972), 279–342.

[12] T. Suwa, *Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris (1998).

[13] W. Fulton, *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*, W. A. Benjamin (1969).

[14] W. W. Adams and P. Loustaunau, *An introduction to Gröbner bases*, Graduate Studies in Mathematics vol. 3, American Mathematical Society, Providence (1994).

[15] J. C. Faugère, P. Gianni, D. Lazard and T. Mora, *Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering*, J. Symb. Comp. **16** (1993), 329–344.

[16] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, varieties and algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (1992).

[17] M. Kreuzer and L. Robbiano, *Computational commutative algebra 1*, Springer (2000).