

SOLUÇÕES ALGÉBRICAS DE CAMPOS DE VETORES PLANARES:
MÉTODOS ALGORÍTMICOS

Luis Menasché Schechter

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Severino Collier Coutinho, Ph.D

Prof. Susana Scheimberg de Makler, D.Sc.

Prof. Jorge Vitório Bacellar dos Santos Pereira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2007

SCHECHTER, LUIS MENASCHE

Soluções Algébricas de Campos de Vetores

Planares:

Métodos Algorítmicos [Rio de Janeiro] 2007

VIII, 76 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação, 2007)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Campos de Vetores

2. Soluções Algébricas

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*Esta dissertação é dedicada a meus pais
Rosa Menasché Schechter
e Marcos Schechter,
ao professor Severino Collier Coutinho,
a Sergio Margulies, Andre Nudelman e todos os amigos da ARI
e a todos os outros amigos verdadeiros que compartilham ou compartilharam em algum
momento o meu caminho.
Uma árvore só se desenvolve após firmar bem suas raízes.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar ao professor Severino Collier Coutinho. O professor Collier é meu orientador nesta Dissertação de Mestrado, foi meu orientador no Projeto Final de Curso e em um projeto de Iniciação Científica durante dois anos e foi meu professor em seis disciplinas dos meus cursos de graduação e mestrado. Eu não poderia ter um orientador melhor, mais dedicado, mais atencioso, mais organizado e mais sério. Ter trabalhado com ele durante este período foi um prazer e uma honra.

Gostaria de destacar também o importantíssimo trabalho realizado por todos os excelentes professores que tive durante meus cursos de graduação e mestrado. Em especial, além do professor Collier, agradeço a Mário Benevides, Adriano Cruz, Ageu Pacheco, Geraldo Zimbrão, Luca Moriconi, Miguel Jonathan, Rolci Cipolatti, Sérgio Guedes, Sulamita Klein e Valmir Barbosa. Muito obrigado a todos.

Não poderia deixar de citar aqui os ótimos amigos que fiz durante a graduação e o mestrado na UFRJ. Graças a eles, estes seis anos tornaram-se muito mais agradáveis e a Universidade se transformou em um ambiente muito mais acolhedor. Em especial, agradeço a Carina Lopes, Carlos Reis, Elias Bareinboim, Felipe Dias, Fernanda Wanderley, Filipi Cavalcante, Hugo Cesar Carneiro, Hugo Sato, Isabella Almeida, João Menezes, Marcelo Alvim, Marcos Ferreira, Marcus Vinicius de Araújo, Maylle Lo Feudo, Pedro Rocha, Ramon Diacovo, Rodrigo Montenegro, Thiago Siqueira e Tiago Mota.

Amigos externos à Universidade também foram muito importantes ao darem o seu suporte. Agradeço a Daniel Menasché, André Schechter, Dan Gandelman, Sergio Margulies, Andre Nudelman e todos os amigos da ARI.

Agradeço também à equipe de desenvolvimento do sistema de Computação Algébrica SINGULAR. O fato do sistema ser tão bem projetado definitivamente foi um facilitador durante o desenvolvimento desta dissertação.

Por último, devo agradecer também ao CNPq pela bolsa concedida a mim para o curso de mestrado e a elaboração desta dissertação.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SOLUÇÕES ALGÉBRICAS DE CAMPOS DE VETORES PLANARES:
MÉTODOS ALGORÍTMICOS

Luis Menasché Schechter

Fevereiro/2007

Orientador: Severino Collier Coutinho

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Apesar do fato de que os campos vetoriais polinomiais que aparecem nas aplicações geralmente possuem curvas algébricas invariantes, isto não é de maneira nenhuma a regra geral. De fato, um campo vetorial genérico, de grau maior ou igual a 2, não possui nenhuma curva algébrica invariante. Entretanto, temos que em geral é razoavelmente difícil determinar, através de algum tipo de teste, se um campo vetorial dado explicitamente possui ou não curvas algébricas invariantes. Isto não é de maneira nenhuma satisfatório, porque campos sem curvas algébricas invariantes podem ser usados em várias aplicações. A construção de testes que permitam determinar se um dado campo vetorial possui ou não curvas algébricas invariantes é precisamente o problema que é abordado nesta dissertação. Serão apresentados dois algoritmos que permitem testar se um dado campo vetorial (com coeficientes racionais) do plano afim possui ou não curvas algébricas invariantes. Além disso, será discutida a performance de suas implementações no sistema de computação algébrica SINGULAR.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ALGEBRAIC SOLUTIONS OF PLANAR VECTOR FIELDS:
ALGORITHMIC METHODS

Luis Menasché Schechter

February/2007

Advisor: Severino Collier Coutinho

Department: Systems and Computer Engineering

Even though most of the polynomial vector fields that appear in applications have algebraic invariant curves, this is by no means the general rule. In fact, a generic vector field, of degree greater than or equal to 2, doesn't have any invariant algebraic curve. However, it turns out that it is usually quite hard to determine, by some kind of test, whether an explicitly given vector field has invariant algebraic curves or not. This is not very satisfactory, because vector fields without algebraic invariant curves may be used in several applications. The construction of tests that allow one to determine whether a given vector field has invariant algebraic curves or not is precisely the problem that is treated in this dissertation. Two algorithms that allow one to test if a given vector field (with rational coefficients) of the affine plane has algebraic invariant curves or not will be presented. Moreover, the performance of their implementations in the computer algebra system SINGULAR will be discussed.

Sumário

Lista de Tabelas	viii
1 Introdução e Objetivos	1
1.1 Uma Breve Retrospectiva Histórica e os Objetivos desta Dissertação	1
1.2 Um Roteiro dos Capítulos Seguintes	3
2 Conceitos Básicos	5
2.1 Anéis e Ideais	5
2.2 O Plano Projetivo	7
2.3 Curvas Algébricas	8
2.4 Campos Vetoriais, Campos de Retas e Derivações	10
2.5 O Espaço Dual	12
2.6 Retas Coincidentes	13
2.7 Formas Diferenciais e Folheações	15
3 Resultados Teóricos Fundamentais	18
3.1 Notação, Hipóteses e Resultados Teóricos Básicos	18
3.2 O Teorema de Noether	23
3.3 Os Teoremas de Baum-Bott e de Camacho-Sad	24
3.3.1 O Teorema-Chave	24
3.3.2 Obtenção das Fórmulas de Baum-Bott e Camacho-Sad	38
3.3.2.1 A Fórmula de Baum-Bott	38
3.3.2.2 A Fórmula de Camacho-Sad	40
4 O Primeiro Algoritmo	43
4.1 As Singularidades no Infinito	43
4.2 As Singularidades Finitas	45
4.3 O Algoritmo	50
5 O Segundo Algoritmo	51
5.1 Uma Nova Análise das Singularidades Finitas	51
5.2 O Algoritmo	54
6 Testes e Resultados	56
7 Conclusões	60
Apêndices	62
A Implementação no Singular dos Algoritmos Descritos	62

Lista de Tabelas

6.1	Tempo médio de execução dos algoritmos para derivações definidas por polinômios densos (100 derivações para cada grau)	57
6.2	Tempo de execução dos algoritmos para derivações definidas por polinômios densos (1 derivação para cada grau)	57
6.3	Percentual de derivações de grau 4 que originam falhas nos algoritmos para diferentes percentuais de coeficientes nulos nos polinômios que as definem (100 derivações para cada percentual)	58

Capítulo 1

Introdução e Objetivos

“Eu quero compartilhar algo com você. As três frases que vão te ajudar durante a vida. Número um: me dê cobertura. Número dois: oh, boa idéia, chefe! Número três: isto já estava assim quando eu cheguei.” - Homer

Simpson

Este capítulo inicial tem três objetivos principais: fornecer um breve apanhado histórico dos estudos relacionados a campos vetoriais e suas soluções algébricas, explanar em linhas gerais os objetivos desta dissertação, mostrando algumas possíveis aplicações para este trabalho, e traçar um roteiro de como o tema da existência (ou ausência) de soluções algébricas de campos vetoriais será abordado nos capítulos seguintes. O leitor não deve sentir-se incomodado caso não compreenda totalmente alguma parte da terminologia utilizada neste capítulo, pois todos os conceitos serão devidamente explicados mais adiante nesta dissertação.

1.1 Uma Breve Retrospectiva Histórica e os Objetivos desta Dissertação

Em um artigo publicado em 1878 [1], Darboux mostrou que curvas algébricas invariantes sob um campo vetorial polinomial podem ser usadas para determinar uma integral primeira da equação diferencial de primeira ordem correspondente. Apesar deste método ter sido um tópico comum em livros-texto do final do século XIX e início do século XX, tais como [2, p. 29, §2.21] e [3, p. 30, §25–32], ele não teve lugar nos desenvolvimentos que tomaram conta da teoria de equações diferenciais durante a maior parte do século passado. Entretanto, as coisas mudaram com o advento da computação. De fato, a busca por curvas algébricas invariantes possui um papel chave no método desenvolvido por M. J. Prolle e M. F. Singer [4] na década de 80 para computar integrais primeiras elementares de equações diferenciais.

Apesar do fato de que os campos vetoriais polinomiais que aparecem nas aplicações geralmente possuem curvas algébricas invariantes, isto não é de maneira nenhuma a regra geral. De fato, um campo vetorial genérico o suficiente (consulte o capítulo 3 para alguns exemplos de hipóteses que se espera que um campo satisfaça em geral), de grau maior ou igual a 2, não possui nenhuma curva algébrica invariante. Este resultado foi primeiramente exposto (embora com uma prova incorreta) em [5] e provado em [6, Teorema 5, p. 342] e [7, Teorema 3, p. 385].

Entretanto, temos que em geral é razoavelmente difícil determinar, através de algum tipo de teste, se um campo vetorial dado explicitamente possui ou não curvas algébricas invariantes. Isto não é de maneira nenhuma satisfatório, porque campos sem curvas algébricas invariantes podem ser usados, por exemplo, na construção explícita de \mathcal{D} -módulos irredutíveis não-holônomos [6, Seção 4.3, p. 236]. Além disso, tal teste também permitiria eliminar o método de integrabilidade de Darboux como possibilidade para se determinar se alguns campos vetoriais do tipo $(-y + P, x + Q)$, onde P e Q são polinômios de grau maior ou igual a 2 sem termos lineares e constantes, nas variáveis x e y , possuem um centro na origem. Para mais detalhes sobre a relação entre o problema do centro e curvas invariantes, pode-se consultar [8].

A construção de testes que permitam determinar se um dado campo vetorial do plano afim possui ou não curvas algébricas invariantes é precisamente o problema que é abordado nesta dissertação. De certa forma, este é apenas mais um passo na aplicação de métodos algorítmicos na tentativa de solucionar problemas algébricos. Em [9], desenvolveu-se um método com objetivos semelhantes ao desta dissertação, mas com a diferença de que os campos considerados eram campos de retas pertencentes ao plano projetivo. A grande desvantagem deste método residia no fato de que as computações necessárias nesta abordagem eram extremamente custosas, o que terminou por limitar a 3 o grau dos campos que ele podia manipular. A partir disso, com a intenção de resgatar os métodos algorítmicos como métodos de solução eficientes, buscou-se um procedimento que provaria que um dado campo do plano projetivo não possui nenhuma curva algébrica invariante ou retornaria “*O Algoritmo Falhou*”. Este foi exatamente o objetivo final do trabalho que desenvolvemos em [10] e [11]. Nestes trabalhos, propusemos dois algoritmos que seguem esta linha de pensamento. A razão pela qual espera-se que eles sejam bem sucedidos, na maioria dos casos, é o fato bem conhecido de que um polinômio genérico em uma variável, com coeficientes racionais, é irredutível sobre \mathbb{Q} . No artigo [12], esta estratégia foi usada para construir famílias de campos de retas do plano projetivo sem curvas algébricas invariantes que possuem um

grau de generalidade bem maior do que os exemplos previamente conhecidos.

Tomando-se então como ponto de partida as idéias expostas em [10] e [11], serão apresentados nesta dissertação dois algoritmos que permitem testar se um dado campo vetorial (com coeficientes racionais) do plano afim possui ou não curvas algébricas invariantes. Embora estes algoritmos possam não ser capazes de chegar a uma conclusão em alguns casos (desta maneira retornando “*O Algoritmo Falhou*”), eles são muito eficientes para campos definidos por polinômios que estão próximos de serem cheios. Para mais detalhes, consulte o capítulo 6, com o resultado dos testes computacionais.

1.2 Um Roteiro dos Capítulos Seguintes

Esta seção tem como objetivo mostrar de maneira resumida quais serão os passos a seguir até os dois algoritmos estabelecidos como objetivos finais desta dissertação.

No Capítulo 2 serão apresentados alguns conceitos algébricos básicos, tais como *anéis, ideais, plano projetivo, curvas algébricas, campos de vetores, espaço dual e formas diferenciais*, que são importantes no entendimento matemático do problema tratado nesta dissertação. Uma questão muito importante neste capítulo é a definição precisa do que é uma “solução algébrica” de um campo de vetores.

No Capítulo 3 serão apresentados resultados teóricos que servirão de base para o desenvolvimento posterior dos algoritmos. Em particular, serão apresentados e provados, sob uma hipótese particular, três teoremas fundamentais: o Teorema de Noether, o Teorema de Baum-Bott e o Teorema de Camacho-Sad. Eles serão utilizados posteriormente em etapas das provas dos teoremas que servem de base aos algoritmos.

No Capítulo 4 será apresentado o primeiro algoritmo. Ele é construído de forma a testar uma série de hipóteses. Se todas as hipóteses forem satisfeitas, então um teorema pode ser aplicado que garante que o campo vetorial analisado não possui nenhuma solução algébrica. Caso uma das hipóteses não seja satisfeita, então nenhuma conclusão pode ser obtida, sendo retornada a mensagem “*O Algoritmo Falhou*”.

No Capítulo 5 damos mais um passo adiante, com a apresentação do segundo algoritmo. O objetivo deste algoritmo é tentar obter uma prova de que um dado campo não possui nenhuma solução algébrica sob hipóteses mais fracas do que as do primeiro algoritmo. Desta forma, espera-se que ele seja capaz de obter sucesso com campos em que o primeiro algoritmo falha.

No Capítulo 6 deixamos a teoria de lado e trabalhamos com as implementações computacionais dos algoritmos. Neste capítulo, são mostrados os testes realizados com os

dois algoritmos e os resultados obtidos. Para realização dos testes, os algoritmos foram implementados e executados no Sistema de Computação Algébrica SINGULAR [13].

No capítulo 7 analisamos os resultados, sendo então o momento de responder às perguntas:

1. A taxa de sucesso é satisfatória ou os algoritmos praticamente só retornam “*O Algoritmo Falhou*”?
2. Esta abordagem é boa do ponto de vista matemático. Mas é também computacionalmente eficiente?
3. Até que grau de campos os algoritmos retornaram repostas em tempos razoáveis?

Capítulo 2

Conceitos Básicos

“Todos sabem que o rock n’ roll atingiu a perfeição em 1974. Isto é um fato científico.” - Homer Simpson

Neste capítulo, discutiremos alguns conceitos algébricos básicos que são importantes para o entendimento do problema que é tratado nesta dissertação. Grande parte dos assuntos tratados neste capítulo pode ser encontrada com maior profundidade em [14], [15] e [16].

2.1 Anéis e Ideais

Um *anel* (comutativo e com unidade) \mathbb{A} é um conjunto fechado para as operações de soma e produto em que estas operações satisfazem as seguintes propriedades:

1. $a + b = b + a$ para todo $a, b \in \mathbb{A}$ (comutatividade da soma);
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{A}$ (associatividade da soma);
3. Existe um elemento $0 \in \mathbb{A}$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{A}$ (elemento neutro da soma);
4. Para todo elemento $a \in \mathbb{A}$ existe um elemento $-a \in \mathbb{A}$ tal que $a + (-a) = 0$ (inverso aditivo);
5. $a * b = b * a$ para todo $a, b \in \mathbb{A}$ (comutatividade do produto);
6. $a * (b * c) = (a * b) * c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{A}$ (associatividade do produto);
7. Existe um elemento $1 \in \mathbb{A}$ tal que $a * 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{A}$ (elemento neutro do produto);

8. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{A}$ (distributividade do produto sobre a soma).

Um *ideal* $I \subset \mathbb{A}$ é um subconjunto de um anel \mathbb{A} que possui as seguintes propriedades:

1. Se $f, g \in I$, então $f + g \in I$;
2. Se $f \in \mathbb{A}$ e $g \in I$, então $f * g \in I$.

Em particular, os conjuntos de polinômios $\mathbb{Q}[X]$ e $\mathbb{C}[X]$, onde X é um conjunto finito e não vazio de variáveis qualquer, são anéis. De agora em diante, todos os anéis \mathbb{A} com que iremos lidar serão anéis de polinômios ou seus corpos de frações. Todos os ideais de anéis de polinômios com coeficientes racionais ou complexos são *ideais finitamente gerados*. Isto significa que qualquer ideal I destes anéis pode ser escrito como

$$I = \{f : f = q_1 a_1 + \cdots + q_n a_n\},$$

onde $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{A}$ e $\{a_1, \dots, a_n\}$ é um conjunto fixo de elementos de I . Escrevemos então $I = (a_1, \dots, a_n)$ para denotar este ideal.

Se I é um ideal de um anel de polinômios, denotamos por $\mathcal{Z}(I)$ o *conjunto de zeros* deste ideal. Isto é, se $I = (a_1, \dots, a_n)$ então $\mathcal{Z}(I) = \{p : a_1(p) = \cdots = a_n(p) = 0\}$.

O ideal radical de I é o ideal $\sqrt{I} = \{f : f^k \in I, \text{ para algum } k \geq 1\}$. Um ideal é chamado de *radical* se $I = \sqrt{I}$. Temos então um teorema que relaciona um ideal I com o seu conjunto de zeros $\mathcal{Z}(I)$.

Teorema 2.1 (Teorema dos Zeros de Hilbert). *Seja $I \subset \mathbb{A}$, onde \mathbb{A} é um anel de polinômios com coeficientes complexos. Se $f \in \mathbb{A}$ zera em todos os pontos de $\mathcal{Z}(I)$, então $f \in \sqrt{I}$, isto é, $f^k \in I$ para algum $k \geq 1$.*

Dizemos que um polinômio h é reduzido se ao fatorarmos $h = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$, temos $e_1 = \cdots = e_n = 1$. Podemos então apresentar um caso especial do Teorema dos Zeros de Hilbert.

Corolário 2.2. *Suponha, no teorema acima, que $I = (h)$, onde h é um polinômio reduzido. Se f zera em todos os pontos de $\mathcal{Z}(I)$, então $f \in I$.*

Se \mathbb{A} é um anel de polinômios e $I \subset \mathbb{A}$ é um ideal, podemos definir uma relação de equivalência entre os termos de \mathbb{A} da seguinte forma:

$$\text{se } f, f' \in \mathbb{A}, f \sim f' \Leftrightarrow f - f' \in I.$$

Denotamos então por \bar{f} a classe de equivalência de f com respeito à relação acima, isto é, $\bar{f} = \{f' \in \mathbb{A} : f' \sim f\}$. Chamamos de *anel quociente* de \mathbb{A} por I o anel

$$\frac{\mathbb{A}}{I} = \{\bar{f} : f \in \mathbb{A}\}.$$

Se \mathbb{A} é um anel de polinômios, podemos definir o *anel local* \mathcal{O}_p como o anel de todas as frações racionais de polinômios de \mathbb{A} que estão definidas no ponto p , isto é,

$$\mathcal{O}_p = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in \mathbb{A} \text{ e } g(p) \neq 0 \right\}.$$

Temos que $\mathbb{A} \subset \mathcal{O}_p$ para qualquer p . Se tomarmos um ideal $I \subset \mathbb{A}$, I obviamente é um subconjunto de \mathcal{O}_p , mas I não é um ideal de \mathcal{O}_p , uma vez que o produto $f * g$, onde $f \in \mathcal{O}_p$ e $g \in I$ pode não pertencer a I . Entretanto, podemos estender I para um subconjunto $I^e \supset I$ de \mathcal{O}_p tal que I^e é um ideal de \mathcal{O}_p . Para isto, fazemos $I^e = \mathcal{O}_p I$, isto é,

$$I^e = \{f : f = gh, \text{ onde } g \in \mathcal{O}_p \text{ e } h \in I\} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in I, q \in \mathbb{A} \text{ e } q(p) \neq 0 \right\}.$$

2.2 O Plano Projetivo

Para construirmos o *plano projetivo complexo*, tomamos inicialmente o espaço $\mathbb{U} = \mathbb{C}^3 \setminus (0, 0, 0)$ e definimos a seguinte relação de equivalência entre seus elementos:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow (x', y', z') = \lambda(x, y, z), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

As classes de equivalência dos elementos de \mathbb{U} por esta relação de equivalência são os elementos do plano projetivo \mathbb{P}^2 .

Vemos, claramente, a partir desta definição, que um dado ponto $(x, y, z) \in \mathbb{P}^2$ tal que $z \neq 0$ pode ser representado por um elemento da forma $(x', y', 1) = (x/z, y/z, 1)$. O mesmo acontece com os pontos que possuem coordenadas $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, que podem ser representados por elementos da forma $(1, y', z')$ e $(x', 1, z')$, respectivamente. Denotamos por U_i , $i \in \{x, y, z\}$, o conjunto dos elementos de \mathbb{P}^2 que possuem a coordenada $i \neq 0$. Como ao menos uma das coordenadas é necessariamente não-nula, temos que $\mathbb{P}^2 = U_x \cup U_y \cup U_z$.

Consideremos então o conjunto U_z . Todos os seus elementos podem ser escritos como $(x, y, 1)$. Desta forma, vemos que a dimensão de U_z é dois e que ele é isomorfo a \mathbb{C}^2 (U_x e U_y também são isomorfos a \mathbb{C}^2 , por um argumento análogo). Tomemos agora o conjunto

$L_\infty = \mathbb{P}^2 \setminus U_z$. Ele é formado pelos elementos de \mathbb{P}^2 da forma $(x, y, 0)$. Dentre estes pontos, alguns possuem coordenada $x \neq 0$, podendo, portanto ser escritos como $(1, y', 0)$ e um deles possui a coordenada $x = 0$: o ponto $(0, 1, 0)$. A partir disto, vemos que L_∞ é linear e possui dimensão 1, sendo portanto uma reta. Como estamos associando o conjunto U_z ao plano afim \mathbb{C}^2 , iremos associar o conjunto L_∞ aos pontos no infinito. Desta forma, L_∞ é a *reta no infinito*. Concluimos então que

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \uplus L_\infty = \{P \in \mathbb{P}^2 : P = (x, y, 1)\} \uplus \{P \in \mathbb{P}^2 : P = (x, y, 0)\},$$

onde \uplus denota união disjunta.

Podemos facilmente transitar entre \mathbb{P}^2 e \mathbb{C}^2 . Seja f um polinômio de $\mathbb{C}[x, y]$. Ele pode ser transformado em um polinômio F de $\mathbb{C}[x, y, z]$, que irá satisfazer $F(x, y, 1) = f(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Obtemos F através da *homogeneização* do polinômio f . Seja $\pi : U_z \rightarrow \mathbb{C}^2$ a aplicação definida por $\pi(x, y, z) = (x/z, y/z)$. Podemos então obter a homogeneização de f como

$$F = z^r \pi^*(f) = z^r f(x/z, y/z),$$

onde r é escolhido de forma a cancelar os pólos da imagem inversa π^* . Em particular, temos que F será um polinômio homogêneo. Inversamente, seja F um polinômio homogêneo de $\mathbb{C}[x, y, z]$. Ele pode ser transformado em um polinômio f de $\mathbb{C}[x, y]$ através da *desomogeneização* de F , obtida como $f = F(x, y, 1)$.

2.3 Curvas Algébricas

Uma *curva algébrica* de \mathbb{C}^2 é definida pelos pontos do plano que satisfazem a equação $f(x, y) = 0$, onde f é um polinômio com coeficientes complexos. No caso do plano projetivo \mathbb{P}^2 , podemos definir analogamente uma curva algébrica projetiva como sendo o conjunto de pontos de \mathbb{P}^2 que satisfazem a equação $F(x, y, z) = 0$, onde F é um polinômio homogêneo com coeficientes complexos.

Seja C uma curva algébrica de \mathbb{C}^2 e p um ponto tal que $p \in C$. Dizemos que p é um ponto *simplex* ou *não-singular* de C se $\nabla f(p) \neq 0$, onde f é o polinômio que define C . Caso contrário, dizemos que p é um ponto *singular* ou uma *singularidade* de C . Denotaremos o conjunto dos pontos singulares de C por $\text{Sing}(C)$. Uma curva é *não-singular* se possui apenas pontos simples e *singular* caso contrário.

Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$ um polinômio que define uma curva algébrica $C \in \mathbb{C}^2$. Suponhamos que $f(0, 0) = 0$. Podemos escrever

$$f = f_1 + \cdots + f_n,$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i de f e $n = \deg(f)$. Seja d , $1 \leq d \leq n$, o menor número para o qual $f_d \neq 0$. Definimos a *multiplicidade algébrica* da curva C no ponto $p = (0, 0)$, denotada por $m_p(C)$, como $m_p(C) = d$. É fácil vermos que a curva C é não-singular em p , se e somente se $m_p(C) = 1$. De uma maneira informal, podemos dizer que $m_p(C)$ conta quantas vezes a curva C passa pelo ponto p . Se $m_p(C) = 2$ e a curva possui duas retas tangentes distintas em p , dizemos que p é um *nó*. Quando $p = (a, b) \neq (0, 0)$, podemos realizar uma translação T que leve a origem no ponto p e então aplicamos as definições acima a $T^*(f)$.

Quando temos uma curva algébrica \overline{C} de \mathbb{P}^2 definida por um polinômio homogêneo F , devemos nos lembrar que $\mathbb{P}^2 = U_x \cup U_y \cup U_z$ e que cada U_i é isomorfo a \mathbb{C}^2 . Desta forma, se $p \in U_i$, então podemos aplicar as definições acima ao polinômio F restrito a U_i , isto é, $f = F|_{U_i}$.

Vamos agora definir o *número de interseção* entre duas curvas C_1 e C_2 de \mathbb{C}^2 em um ponto p , denotado por $I(p, C_1 \cap C_2)$. Caso estejamos trabalhando com curvas projetivas, podemos utilizar a mesma estratégia descrita anteriormente, isto é, se $p \in U_i$, trabalhamos com as curvas restritas a U_i . Informalmente, o número de interseção tem o objetivo de contar quantas vezes as curvas C_1 e C_2 se intersectam em um dado ponto p . Por esta definição informal, já podemos perceber que o número de interseção deverá estar relacionado, de alguma maneira, com as multiplicidades $m_p(C_1)$ e $m_p(C_2)$. De fato, $I(p, C_1 \cap C_2)$ deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $I(p, C_1 \cap C_2)$ é um número finito não negativo se e somente se p não pertence a um componente comum de C_1 e C_2 . Caso contrário, $I(p, C_1 \cap C_2) = \infty$;
2. $I(p, C_1 \cap C_2) = 0$ se e somente se $p \notin C_1 \cap C_2$;
3. $I(p, C_1 \cap C_2)$ é invariante por transformações afins;
4. $I(p, C_1 \cap C_2) = I(p, C_2 \cap C_1)$;
5. $I(p, C_1 \cap C_2) \geq m_p(C_1)m_p(C_2)$. Se C_1 e C_2 não possuem retas tangentes comuns em p , então $I(p, C_1 \cap C_2) = m_p(C_1)m_p(C_2)$;

6. Seja $C_1 = \mathcal{Z}(f)$ e $C_2 = \mathcal{Z}(g)$. Se $f = \prod f_i^{r_i}$, $g = \prod g_j^{s_j}$, $C_{1i} = \mathcal{Z}(f_i)$ e $C_{2j} = \mathcal{Z}(g_j)$, então $I(p, C_1 \cap C_2) = \sum_{i,j} r_i s_j I(p, C_{1i} \cap C_{2j})$;

7. Seja $C_1 = \mathcal{Z}(f)$, $C_2 = \mathcal{Z}(g)$ e a um polinômio tal que a curva C_3 seja definida como $C_3 = \mathcal{Z}(g + af)$. Então, $I(p, C_1 \cap C_2) = I(p, C_1 \cap C_3)$.

Existe um único valor para $I(p, C_1 \cap C_2)$ satisfazendo as propriedades acima. Seja $C_1 = \mathcal{Z}(f)$, $C_2 = \mathcal{Z}(g)$ e $J = (f, g)$. Este valor é dado por

$$I(p, C_1 \cap C_2) = \dim \left(\frac{\mathcal{O}_p}{\mathcal{O}_p J} \right).$$

No caso de curvas projetivas, existe um teorema muito útil que nos permite calcular o número de pontos de interseção entre duas curvas. Para uma demonstração, consulte [15, Capítulo 5].

Teorema 2.3 (Teorema de Bézout). *Sejam \overline{C}_1 e \overline{C}_2 duas curvas algébricas projetivas, sem componentes comuns, definidas pelos polinômios homogêneos F e G , respectivamente, onde $\deg(F) = m$ e $\deg(G) = n$. Então,*

$$\sum_p I(p, \overline{C}_1 \cap \overline{C}_2) = mn.$$

2.4 Campos Vetoriais, Campos de Retas e Derivações

Um *campo vetorial* definido em \mathbb{C}^2 é uma função $v : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. A razão para o nome campo vetorial vem da interpretação que damos a esta função: pensamos em v como uma regra que, a cada ponto p do plano \mathbb{C}^2 associa um vetor $v(p) \in \mathbb{C}^2$. De forma análoga, um campo vetorial definido em \mathbb{C}^3 é uma função $V : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$. Logo, podemos escrever os campos v e V como

$$v(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y)) \quad \text{e} \quad V(x, y, z) = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z)),$$

onde v_x e v_y são polinômios de $\mathbb{C}[x, y]$ e V_x , V_y e V_z são polinômios de $\mathbb{C}[x, y, z]$. Em particular, podemos definir *campos homogêneos* de \mathbb{C}^3 como campos em que V_x , V_y e V_z são polinômios homogêneos de mesmo grau (maior ou igual a 1), denotando este grau por $\deg(V)$.

O campo vetorial de \mathbb{C}^3 definido como $E(x, y, z) = (x, y, z)$ é chamado de *campo de Euler*. Se tomarmos dois campos homogêneos V e V' de \mathbb{C}^3 tais que $\deg(V) = \deg(V')$, o

campo E define uma relação de equivalência entre eles, da seguinte forma:

$$V \sim V' \Leftrightarrow V = V' + \lambda E, \quad (2.1)$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}[x, y, z]$ é um polinômio homogêneo de grau $\deg(V) - 1$. Seja \mathbf{V} a classe de equivalência de V por esta relação. Um *campo de retas* de \mathbb{P}^2 pode ser definido por \mathbf{V} , como será mostrado na seção 2.7. Diremos então que \mathbf{V} é um campo de \mathbb{P}^2 e que V e V' são *representantes* deste campo.

Seja $V = (V_x, V_y, V_z)$ um representante do campo \mathbf{V} de \mathbb{P}^2 . Se restringirmos este campo a U_z , obteremos um campo de \mathbb{C}^2 . Para isto, desomogeneizamos V , fazendo

$$v(x, y) = (zV - V_z E)(x, y, 1).$$

O campo v resultante é independente da escolha do representante de \mathbf{V} .

Seja C uma curva algébrica de \mathbb{C}^2 definida por um polinômio f . Podemos definir um campo vetorial relacionado a esta curva. Basta tomarmos o *campo gradiente* de f , isto é,

$$v_f(x, y) = \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Este campo é perpendicular à curva C em todos os pontos $p \in C$. Pela definição de singularidade de uma curva algébrica afim, podemos, a partir do campo gradiente, dizer que um ponto $p \in C$ é uma singularidade de C se e somente se $v_f(p) = 0$. Desta forma, podemos estender o conceito de singularidade de uma curva afim para o conceito de singularidade de um campo afim. Dizemos que $p \in \mathbb{C}^2$ é uma singularidade de um campo $v(x, y)$ se e somente se $v(p) = 0$. Denotaremos o conjunto dos pontos singulares de v por $\text{Sing}(v)$.

Se $f = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$ e $g = p_1 \dots p_n$, então $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, isto é, os dois polinômios definem a mesma curva. Desta forma, podemos sempre assumir que as curvas são reduzidas, ou seja, definidas por polinômios reduzidos.

Nesta dissertação, estamos interessados em determinar se um dado campo vetorial $v(x, y)$ de \mathbb{C}^2 possui ou não soluções algébricas. Uma solução algébrica, ou curva algébrica invariante, é simplesmente uma curva algébrica C que é tangente ao campo v em todos os pontos $p \in C$ tais que $p \notin \text{Sing}(C) \cup \text{Sing}(v)$. Isto significa que, se uma curva reduzida $C = \mathcal{Z}(f)$ é uma solução algébrica de v , então temos que

$$v_x(p) \frac{\partial f}{\partial x}(p) + v_y(p) \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0, \text{ para todo } p \in C. \quad (2.2)$$

Então, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert,

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = gf,$$

para algum $g \in \mathbb{C}[x, y]$.

Definimos então a *derivada* de \mathbb{C}^2 correspondente ao campo v da seguinte forma:

$$D = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Assim, se a curva reduzida $C = \mathcal{Z}(f)$ é uma solução algébrica de v , então temos que

$$D(f) = gf,$$

para algum $g \in \mathbb{C}[x, y]$.

Conceitos análogos podem ser definidos para o plano projetivo \mathbb{P}^2 . Em particular, se

$$D = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z}$$

é uma derivação homogênea de \mathbb{C}^3 correspondente ao representante V do campo \mathbf{V} e $\bar{C} = \mathcal{Z}(F)$ é uma solução algébrica de \mathbf{V} então

$$D(F) = GF,$$

para algum polinômio homogêneo $G \in \mathbb{C}[x, y, z]$.

2.5 O Espaço Dual

Definimos o *espaço dual* de um espaço vetorial \mathbb{W} , finitamente gerado sobre \mathbb{C} , como o conjunto de todas as transformações lineares $\lambda : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{C}$ (chamadas de *funcionais lineares*) e denotamos este espaço por \mathbb{W}^* . Temos que \mathbb{W}^* também é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} .

Naturalmente, se \mathbb{W}^* é um espaço vetorial, então deve admitir uma base. Podemos facilmente construir uma base de \mathbb{W}^* a partir de uma base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{W} . A base de \mathbb{W}^* assume a forma $B^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$, onde $v_i^*, 1 \leq i \leq n$ são funcionais lineares definidos da seguinte forma:

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

Como a dimensão de um espaço vetorial é igual ao número de elementos de uma base deste

espaço, podemos concluir também que $\dim(\mathbb{W}^*) = \dim(\mathbb{W})$.

Tomemos agora o caso em que $\mathbb{W} = \mathbb{C}^2$. A relação entre uma base de \mathbb{C}^2 e sua base dual fica mais clara quando escrevemos vetores e funcionais lineares em notação matricial. Como é usual, representamos os vetores como matrizes coluna. Seja e_i o vetor que possui 1 na i -ésima posição e 0 nas demais. Pela equação 2.3, e_i^* deve corresponder à matriz linha que possui 1 na i -ésima posição e 0 nas demais. Em outras palavras, $e_i^* = e_i^t$.

Existe uma notação muito utilizada para a base dual de \mathbb{C}^2 , que remonta ao século XVII. Digamos que $\{e_1, e_2\}$ seja a base canônica. Neste caso, o funcional linear e_1^* da base do espaço dual é usualmente denotado por dx e o funcional e_2^* por dy . Isto significa que $dx(x, y) = x$ e $dy(x, y) = y$. Usando esta notação, temos que qualquer funcional linear de $(\mathbb{C}^2)^*$ pode ser escrito como $adx + bdy$, com $a, b \in \mathbb{C}$. Analogamente, qualquer funcional linear de $(\mathbb{C}^3)^*$ pode ser escrito como $adx + bdy + cdz$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$, onde $dx(x, y, z) = x$, $dy(x, y, z) = y$ e $dz(x, y, z) = z$.

2.6 Retas Coincidentes

Uma reta r que passa pela origem de \mathbb{C}^2 pode ser escrita como o núcleo de uma aplicação $\lambda \in (\mathbb{C}^2)^*$. Isto é, a reta r pode ser descrita como o conjunto de pontos $p \in \mathbb{C}^2$ tais que $\lambda(p) = 0$. De modo análogo, uma reta r' de \mathbb{P}^2 pode ser escrita como o núcleo de uma aplicação linear $\lambda' \in (\mathbb{C}^3)^*$.

Suponhamos agora que temos duas retas r_1 e r_2 de \mathbb{C}^2 , ambas passando pela origem, e queremos determinar se elas são ou não coincidentes. Digamos que $r_1 = N(\lambda_1)$ e $r_2 = N(\lambda_2)$, onde λ_1 e λ_2 são funcionais lineares não nulos de $(\mathbb{C}^2)^*$. Para que $r_1 = r_2$, é necessário que os dois núcleos coincidam. Neste caso, qualquer vetor $u \in N(\lambda_1) = N(\lambda_2)$ é uma base de ambos os núcleos. Escolhemos, então, um vetor não nulo $w \in \mathbb{C}^2$, $w \notin N(\lambda_1) = N(\lambda_2)$. Isto implica que $\{u, w\}$ é uma base de \mathbb{C}^2 (já que u e w são linearmente independentes por construção), de modo que qualquer vetor $v \in \mathbb{C}^2$ pode ser escrito na forma $v = au + bw$. Logo,

$$\lambda_j(v) = \lambda_j(au + bw) = b\lambda_j(w),$$

para $j = 1, 2$. Temos então

$$\frac{\lambda_1(v)}{\lambda_1(w)} = \frac{\lambda_2(v)}{\lambda_2(w)} = b.$$

Como $\lambda_1(w) \neq 0$, já que $w \notin N(\lambda_1)$, segue que

$$\lambda_2(v) = \frac{\lambda_2(w)}{\lambda_1(w)} \lambda_1(v) = c \lambda_1(v),$$

qualquer que seja $v \in \mathbb{C}^2$. Em outras palavras, os funcionais lineares λ_1 e λ_2 são múltiplos constantes um do outro.

Podemos reformular isto dizendo que $\lambda_2 = c \lambda_1$ se, e somente se,

$$\lambda_1(u) \lambda_2(v) - \lambda_1(v) \lambda_2(u) = 0,$$

quaisquer que sejam $u, v \in \mathbb{C}^2$. Temos assim um determinante, expresso como

$$\det \begin{bmatrix} \lambda_1(u) & \lambda_2(u) \\ \lambda_1(v) & \lambda_2(v) \end{bmatrix}$$

Devemos notar que este determinante depende de quatro elementos: dois funcionais lineares (λ_1 e λ_2) e dois vetores de \mathbb{C}^2 (u e v). Para deixar isto claro, escrevemos

$$(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(u, v)$$

para representar este determinante. O símbolo \wedge denota uma operação que associa dois funcionais lineares a um determinante, chamada de *produto exterior*.

Enumeremos agora algumas propriedades do produto exterior. Como a permutação das linhas ou das colunas do determinante inverte o seu sinal, temos que

1. $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(u, v) = -(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(v, u)$;
2. $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(u, v) = -(\lambda_2 \wedge \lambda_1)(u, v)$;
3. $(\lambda \wedge \lambda)(u, v) = 0$, para todo $\lambda \in (\mathbb{C}^2)^*$;
4. $(a\lambda_1) \wedge (b\lambda_2)(u, v) = ab(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(u, v)$, para todo $a, b \in \mathbb{C}$.

Podemos realizar um cálculo análogo com funcionais lineares de $(\mathbb{C}^3)^*$ para determinar quando duas retas de \mathbb{P}^2 são coincidentes, obtendo resultados semelhantes. Resumimos, então, os cálculos realizados em ambos os casos na proposição a seguir.

Proposição 2.4. *Os núcleos de dois funcionais lineares λ_1 e λ_2 de $(\mathbb{C}^2)^*$ ou de $(\mathbb{C}^3)^*$ coincidem se e somente se $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(u, v) = 0$, para todo u, v em \mathbb{C}^2 ou \mathbb{C}^3 , respectivamente.*

2.7 Formas Diferenciais e Folheações

Vamos, nesta seção, desenvolver uma maneira de descrever campos de retas a partir da linguagem de funcionais lineares. Se um campo vetorial de \mathbb{C}^2 associa a cada ponto do plano um vetor $v(x, y)$, então, intuitivamente, um campo de retas associa a cada ponto do plano uma reta pela origem $\omega(x, y)$. Isto é, um campo de retas é uma aplicação

$$\omega : \mathbb{C}^2 \rightarrow (\mathbb{C}^2)^*,$$

que associa a cada ponto do plano um funcional linear. O núcleo deste funcional define univocamente uma reta pela origem. Desta forma, podemos escrever ω como

$$\omega(x, y) = a(x, y)dx + b(x, y)dy,$$

onde $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$. Dizemos que a aplicação ω , definida da forma acima, é uma *1-forma diferencial*. Assim, temos que a reta associada a um ponto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ pela aplicação ω é formada por todos os pontos $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tais que

$$\omega(x, y)(u, v) = (a(x, y)dx + b(x, y)dy)(u, v) = 0.$$

Um campo de retas muito importante, é o campo de retas associado a um polinômio $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Ele é dado pela 1-forma

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Esta 1-forma é conhecida como a *diferencial de f* e denotada por df . É interessante pensar em df como o correspondente nos campos de retas ao gradiente nos campos de vetores. No entanto, df define um campo de retas *tangentes* a $f = 0$, enquanto ∇f define um campo de vetores *normais* a $f = 0$.

Dado um campo vetorial $v(x, y)$ de \mathbb{C}^2 , podemos determinar um campo de retas $\omega(x, y)$ associado a ele. Ele será o campo que, a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, associa a reta $\omega(x, y)$ cuja direção é dada pelo vetor $v(x, y)$. Neste caso, ω é chamado de campo de retas dual (ou 1-forma dual) a v e vice-versa. É fácil vermos que se $v(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$, onde $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$, então o campo de retas dual a v será

$$\omega(x, y) = \omega_x dx + \omega_y dy = b(x, y)dx - a(x, y)dy.$$

Analogamente, podemos definir em \mathbb{P}^2 um campo de retas projetivo através de uma 1-forma. Assim, se Ω é um campo de retas de \mathbb{P}^2 , ele pode ser escrito como

$$\Omega(x, y, z) = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz,$$

onde A, B, C são polinômios homogêneos de mesmo grau de $\mathbb{C}[x, y, z]$, tais que $xA + yB + zC = 0$, como será mostrado mais adiante. Chamamos a um campo de retas projetivo de *folheação* de \mathbb{P}^2 .

Analogamente ao caso afim, dado um campo \mathbf{V} de \mathbb{P}^2 , podemos determinar uma 1-forma $\Omega(x, y, z)$ correspondente a ele. Entretanto, neste caso não é tão imediato descobrirmos qual a forma que Ω deverá possuir para satisfazer esta correspondência.

Seja $V = (V_x, V_y, V_z)$ um representante de \mathbf{V} ($\deg(V) = n$). Vamos desomogeneizar V , obtendo um campo v de \mathbb{C}^2 .

$$\begin{aligned} v(x, y) &= (zV - V_z E)(x, y, 1) = (zV_x - xV_z, zV_y - yV_z, 0)(x, y, 1) = \\ &= (\tilde{V}_x - x\tilde{V}_z, \tilde{V}_y - y\tilde{V}_z), \end{aligned}$$

onde $\tilde{V}_x = V_x(x, y, 1)$, $\tilde{V}_y = V_y(x, y, 1)$ e $\tilde{V}_z = V_z(x, y, 1)$. Sabemos que o campo de retas dual a v é $\omega(x, y) = (\tilde{V}_y - y\tilde{V}_z)dx - (\tilde{V}_x - x\tilde{V}_z)dy$. Vamos então homogeneizar esta 1-forma de \mathbb{C}^2 para uma 1-forma Ω de \mathbb{P}^2 . Seja $\pi : U_z \rightarrow \mathbb{C}^2$ a aplicação definida por $\pi(x, y, z) = (x/z, y/z)$. Podemos então obter a homogeneização de ω como $\Omega = z^r \pi^*(\omega)$, onde r é escolhido de forma a cancelar os pólos da imagem inversa π^* . Temos que

$$\pi^*(\omega) = \pi^*(\tilde{V}_y - y\tilde{V}_z)d\left(\frac{x}{z}\right) - \pi^*(\tilde{V}_x - x\tilde{V}_z)d\left(\frac{y}{z}\right).$$

Mas, pela definição da diferencial df ,

$$d\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{dx}{z} - \frac{xdz}{z^2} \quad \text{e} \quad d\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{dy}{z} - \frac{ydz}{z^2}.$$

Assim,

$$\pi^*(\omega) = \frac{(zV_y - yV_z)}{z^{n+1}}dx - \frac{(zV_x - xV_z)}{z^{n+1}}dy + \frac{[y(zV_x - xV_z) - x(zV_y - yV_z)]}{z^{n+2}}dz.$$

Logo,

$$\Omega(x, y, z) = \Omega_x dx + \Omega_y dy + \Omega_z dz = (zV_y - yV_z)dx + (xV_z - zV_x)dy + (yV_x - xV_y)dz.$$

Em particular, temos $x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z = 0$.

Se repetirmos o processo acima para um outro representante $V' = V + \lambda E$ de \mathbf{V} , obteremos exatamente a mesma 1-forma Ω acima. É devido a isto que afirmamos, na seção 2.4, que campos de retas de \mathbb{P}^2 são definidos pelas classes de equivalência da relação 2.1.

Podemos definir as singularidades de um campo através de 1-formas. Uma singularidade de v será um ponto p tal que a 1-forma dual ω calculada em p se anula, isto é, $\omega_x(p) = \omega_y(p) = 0$. Analogamente, uma singularidade de um campo \mathbf{V} de \mathbb{P}^2 será um ponto p tal que a 1-forma Ω calculada em p se anula, ou seja, $\Omega_x(p) = \Omega_y(p) = \Omega_z(p) = 0$.

Vamos agora estabelecer, em função de 1-formas, o critério para que uma dada curva algébrica reduzida C definida pelo polinômio f seja uma solução algébrica do campo v . Tomemos a 1-forma $\omega = adx + bdy$ dual a v . Em cada ponto do plano, ela define uma reta com direção tangente ao campo. Por sua vez, a 1-forma df , em cada ponto da curva expressa por f , define uma reta com direção tangente à curva. Desta forma, para que a curva seja tangente ao campo, temos que as retas definidas pelos funcionais lineares $\omega(p)$ e $df(p)$ devem ser coincidentes para todo $p \in C$. Logo, como vimos anteriormente, isto significa que

$$\omega(p) \wedge df(p) = 0,$$

para todo $p \in C$. Mas $\omega \wedge df = c(x, y)dx \wedge dy$, para algum $c \in \mathbb{C}[x, y]$, pelas regras do produto exterior. Temos então que o polinômio c deve zerar em todos os pontos em que f zera. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, isto significa que

$$\omega \wedge df = f\theta,$$

onde θ é um produto exterior de 1-formas, isto é, uma 2-forma.

Analogamente, se \overline{C} é uma curva algébrica projetiva reduzida definida pelo polinômio homogêneo F e Ω é a 1-forma correspondente a um campo \mathbf{V} , então F é solução algébrica de \mathbf{V} se e somente se

$$\Omega \wedge dF = F\Theta,$$

onde Θ é uma 2-forma homogênea.

Capítulo 3

Resultados Teóricos Fundamentais

“Fatos não significam nada. Você pode usar fatos para provar qualquer coisa que não seja nem remotamente verdade!” - Homer Simpson

Neste capítulo, serão apresentados algumas notações, hipóteses, proposições e teoremas que serão fundamentais para o desenvolvimento do que virá adiante nesta dissertação.

3.1 Notação, Hipóteses e Resultados Teóricos Básicos

Hipótese 3.1. *Seja*

$$D_{a,b} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

uma derivação de $\mathbb{C}[x, y]$. Em nossa análise, as seguintes condições sobre os polinômios a e b serão sempre válidas:

1. $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$;
2. $\deg(a) = \deg(b) = n \geq 2$;
3. *O polinômio $ya_n - xb_n$ é não nulo e irredutível sobre \mathbb{Q} , onde a_n e b_n denotam as componentes homogêneas de grau n dos polinômios a e b ;*

O item 3 acima implica nos dois fatos abaixo, que são colocados separadamente por questões de praticidade.

4. x não divide a_n ;
5. $\text{mdc}(a_n, b_n) = 1$.

A derivação $D_{a,b}$ de $\mathbb{C}[x, y]$ dá origem à 1-forma $\omega = bdx - ady$ de \mathbb{C}^2 . Denotemos por U_z o subconjunto aberto de \mathbb{P}^2 definido por $z \neq 0$, e seja $\pi : U_z \rightarrow \mathbb{C}^2$ a aplicação definida por $\pi(x, y, z) = (x/z, y/z)$. Construimos então

$$\Omega_{a,b} = z^r \pi^*(bdx - ady), \quad (3.1)$$

onde r é escolhido de forma a cancelar os pólos da imagem inversa π^* . Temos que

$$\pi^*(bdx - ady) = b\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)d\left(\frac{x}{z}\right) - a\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)d\left(\frac{y}{z}\right).$$

Mas

$$d\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{dx}{z} - \frac{xdz}{z^2} \quad \text{e} \quad d\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{dy}{z} - \frac{ydz}{z^2}.$$

Assim, como estamos assumindo que $\deg(a) = \deg(b) = n$,

$$\begin{aligned} \pi^*(bdx - ady) &= \frac{b^h}{z^n} \left(\frac{dx}{z} - \frac{xdz}{z^2} \right) - \frac{a^h}{z^n} \left(\frac{dy}{z} - \frac{ydz}{z^2} \right) = \\ &= \frac{b^h}{z^{n+1}} dx - \frac{a^h}{z^{n+1}} dy + \frac{(ya^h - xb^h)}{z^{n+2}} dz, \end{aligned}$$

onde a^h e b^h denotam as homogeneizações de a e b , respectivamente. Então,

$$\Omega_{a,b} = zb^h dx - za^h dy + (ya^h - xb^h) dz. \quad (3.2)$$

A 1-forma $\Omega_{a,b}$ define uma folheação de \mathbb{P}^2 que denotamos por $\mathcal{F}_{a,b}$. De agora em diante, iremos descartar os subscritos a não ser que seja necessário chamar a atenção para a dependência de D, Ω , ou \mathcal{F} com relação aos coeficientes a e b . Sob as hipóteses acima, dizemos que o grau da folheação \mathcal{F} é n . A definição de grau de uma folheação de \mathbb{P}^2 encontra-se em [17, p. 884]. Como se pode verificar facilmente, pela hipótese 3.1, item 5, temos que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Em particular, pelo Teorema de Bézout, isto implica que \mathcal{F} possui um conjunto finito de singularidades.

Seja \overline{C} uma curva reduzida de \mathbb{P}^2 definida como o conjunto de zeros do polinômio homogêneo $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Em outras palavras,

$$\overline{C} = \mathcal{Z}(F).$$

Dizemos que \overline{C} é *invariante* sob \mathcal{F} se existe uma 2-forma homogênea Θ tal que

$$\Omega \wedge dF = F\Theta. \quad (3.3)$$

Tal curva também é chamada de *solução algébrica* de \mathcal{F} . Note que z é uma solução algébrica de Ω , como uma inspeção na equação 3.2 mostra. Se $F \neq z$, então a equação 3.3 é equivalente a

$$D(f) = gf \quad (3.4)$$

onde $f(x, y) = F(x, y, 1)$ é a desomogeneização de F em U_z e $g \in \mathbb{C}[x, y]$. Reciprocamente, se um polinômio reduzido $f \in \mathbb{C}[x, y]$ satisfaz a equação 3.4 então sua homogeneização F com respeito a z é uma solução algébrica de Ω . Neste caso, também dizemos que f é uma *solução algébrica* ou é *invariante* sob Ω . Portanto, uma curva C do plano afim \mathbb{C}^2 é invariante sob D se e somente se sua projetivização $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2$ é invariante sob Ω .

Nossa primeira proposição diz que, se uma 1-forma Ω com coeficientes racionais possui uma solução algébrica (com coeficientes complexos), então ela possui também uma solução (não necessariamente a mesma) com coeficientes racionais. Para uma prova deste resultado, veja [18] ou [10].

Proposição 3.2. *Se Ω possui uma solução algébrica além de L_∞ , então existe $z \neq F \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ tal que $\mathcal{Z}(F)$ também é uma solução algébrica de Ω .*

Desta forma, para provar que uma 1-forma Ω , com coeficientes racionais, não possui soluções algébricas em $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$, é suficiente considerar o caso especial em que a solução é definida por um polinômio em $\mathbb{Q}[x, y, z]$. Portanto, podemos assumir durante o restante desta dissertação que todas as curvas são definidas sobre \mathbb{Q} .

Lema 3.3. *Se \overline{C} é uma solução algébrica reduzida de \mathcal{F} , que não possui L_∞ como uma de suas componentes irredutíveis, então*

$$\emptyset \neq \overline{C} \cap L_\infty = \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty.$$

Demonstração. Pelo teorema de Bézout,

$$\overline{C} \cap L_\infty \neq \emptyset,$$

uma vez que $\deg(\overline{C}) \geq 1$. Uma vez que tanto \overline{C} como L_∞ são soluções algébricas de \mathcal{F} ,

seus pontos de interseção são também. Portanto,

$$\overline{C} \cap L_\infty \subseteq \text{Sing}(\mathcal{F}).$$

Seja então $\overline{C} = \mathcal{Z}(F)$, para algum polinômio homogêneo $F \in \mathbb{Q}[x, y, z]$. Logo, como L_∞ não é uma componente de \overline{C} , $F(x, y, 0)$ é um polinômio não-nulo. Mas o conjunto $\overline{C} \cap L_\infty$ é definido pelos pontos $(x_0, y_0, 0)$ tais que $F(x_0, y_0, 0) = 0$ e as singularidades de \mathcal{F} em L_∞ são as raízes de $ya_n - xb_n$. Desta forma, $\text{mdc}(F(x, y, 0), ya_n - xb_n) \neq 1$. Entretanto, $ya_n - xb_n$ é irredutível sobre \mathbb{Q} pela hipótese 3.1, item 3. Então, como $F(x, y, 0)$ possui coeficientes racionais, $\text{mdc}(F(x, y, 0), ya_n - xb_n) = ya_n - xb_n$ e $ya_n - xb_n$ divide $F(x, y, 0)$. Mas como as raízes de $F(x, y, 0)$ representam singularidades no infinito e as raízes de $ya_n - xb_n$ representam todas as singularidades no infinito, o fato de $ya_n - xb_n$ dividir $F(x, y, 0)$ implica que estes dois polinômios possuem a mesma fatoração, a menos da multiplicidade dos fatores, o que prova que F passa por todas as singularidades no infinito, demonstrando a igualdade no enunciado do lema. Além disso, como $ya_n - xb_n$ possui grau $n + 1$, o conjunto $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty$ possui exatamente $n + 1$ singularidades distintas. \square

O jacobiano de \mathcal{F} em um ponto $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ é a matriz

$$J(p) = \begin{bmatrix} \partial a / \partial x & \partial a / \partial y \\ \partial b / \partial x & \partial b / \partial y \end{bmatrix}.$$

Dizemos que \mathcal{F} é não-degenerada em p se $\det(J(p)) \neq 0$. Neste caso, os autovalores λ_1 e λ_2 de $J(p)$ são ambos não nulos, e o quociente λ_1/λ_2 e seu recíproco são os *expoentes característicos* de \mathcal{F} em p . Seja $A \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$. O conjunto de todos os números complexos que são expoentes característicos de \mathcal{F} em uma singularidade de A será denotado por $\text{Exp}_{\mathcal{F}}(A)$.

Um resultado chave para várias de nossas provas é a seguinte proposição.

Proposição 3.4. *Seja \overline{C} uma curva algébrica reduzida que é invariante sob \mathcal{F} . Se*

$$\text{Exp}_{\mathcal{F}}(\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty) \cap \mathbb{Q} = \emptyset,$$

então \overline{C} é não-singular em todos os seus pontos no infinito e $\deg(\overline{C}) = n + 1$.

Demonstração. Seja $\overline{C} = \mathcal{Z}(F)$ para algum polinômio homogêneo reduzido $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Como $F \neq z$, o polinômio zF define uma solução algébrica de \mathcal{F} . Entretanto, a hipótese sobre os expoentes característicos implica que todas as singularidades de $\mathcal{Z}(zF)$ em L_∞ são

nós, conforme [19, Teorema 2.3, p. 58]. Mas isto só pode acontecer se \overline{C} e L_∞ se cortam transversalmente em todos os seus pontos de interseção. Portanto, \overline{C} é não-singular em todos os pontos de $\overline{C} \cap L_\infty$. Em particular, o número de interseção de \overline{C} e L_∞ em todo ponto da interseção destas duas curvas é 1. Portanto, pelo Teorema de Bézout e pelo lema 3.3, $\deg(\overline{C}) = n + 1$. \square

Uma aplicação importante dos expoentes característicos de \mathcal{F} diz respeito a índices de um campo vetorial em suas singularidades. Dois destes índices serão computados como parte de provas nos capítulos subseqüentes, então iremos defini-los aqui. Entretanto, as definições que daremos não são as mais gerais. De fato, elas estão formatadas para as necessidades específicas desta dissertação. Seja p uma singularidade de \mathcal{F} . Se p é não-degenerada e λ_1 e λ_2 são os autovalores do jacobiano de \mathcal{F} em p , então

$$\text{BB}_{\mathcal{F}}(p) = \frac{\text{tr}(J(p))^2}{\det(J(p))} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2, \quad (3.5)$$

é o índice de Baum-Bott de \mathcal{F} em p . A seguinte formulação do teorema de Baum-Bott será usada na prova de uma proposição no próximo capítulo.

Teorema 3.5 (Teorema de Baum-Bott). *A soma dos índices de Baum-Bott de uma folheação \mathcal{F} , de grau n , sobre todas as suas singularidades é igual a $(n + 2)^2$.*

Suponha agora que $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. Se \overline{C} é uma curva não-singular em p e invariante sob \mathcal{F} , o índice de Camacho-Sad de \overline{C} em p é

$$\text{CS}_{\mathcal{F}}(\overline{C}, p) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (3.6)$$

onde o vetor tangente a \overline{C} em p é um autovetor de λ_2 com respeito ao jacobiano de \mathcal{F} em p .

Teorema 3.6 (Teorema de Camacho-Sad). *Seja \overline{C} uma curva algébrica de \mathbb{P}^2 invariante sob \mathcal{F} . A soma dos índices de Camacho-Sad de \overline{C} sobre todas as singularidades de \mathcal{F} contidas em \overline{C} é igual a $\deg(\overline{C})^2$.*

Este teorema, assim como o teorema 3.5, serão demonstrados na seção 3.3, no caso particular em que todas as singularidades de \mathcal{F} são distintas, que é o caso que irá nos interessar. Para uma prova mais geral destes teoremas, veja [20, Capítulo V, pp. 148-156] ou [21, pp. 32-40].

O resultado final desta seção também é uma consequência do teorema de Baum-Bott (veja [20, Teorema 1.1, p. 150]).

Proposição 3.7. *Uma folheação \mathcal{F} , de grau n , de \mathbb{P}^2 possui $n^2 + n + 1$ singularidades, contadas com multiplicidade. Além disso, se as $n^2 + n + 1$ singularidades são distintas, então todas elas são não-degeneradas.*

3.2 O Teorema de Noether

Lema 3.8. *Seja $I = (a, b) \subset \mathbb{C}[x, y]$ um ideal com número finito de zeros. Denotemos por $\mathcal{Z}(I) = \{p_1, \dots, p_s\}$ o seu conjunto de zeros. Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Se*

$$f \in \bigcap_{j=1}^s \mathcal{O}_{p_j} I,$$

então $f \in I$.

Demonstração. Se $f \in \mathcal{O}_{p_j} I$, então $f = g_j/q_j$, onde $g_j \in I$ e $q_j(p_j) \neq 0$. Como $f \in \mathcal{O}_{p_j} I$ para todo $j = 1, \dots, s$, então existem polinômios q_1, \dots, q_s tais que cada um deles é diferente de zero em pelo menos um dos pontos de $\mathcal{Z}(I)$. Desta forma, temos que $\mathcal{Z}(a, b, q_1, \dots, q_s) = \emptyset$. Pelo teorema dos zeros de Hilbert, isto implica que o ideal $J = (a, b, q_1, \dots, q_s)$ é igual a $\mathbb{C}[x, y]$. Isto, por sua vez, implica que existem polinômios $c_1, \dots, c_s, d_1, d_2 \in \mathbb{C}[x, y]$ tais que

$$c_1 q_1 + \dots + c_s q_s + d_1 a + d_2 b = 1.$$

Multiplicando esta equação por f , obtemos

$$c_1 f q_1 + \dots + c_s f q_s + d_1 f a + d_2 f b = c_1 g_1 + \dots + c_s g_s + d_1 f a + d_2 f b = f.$$

Mas os polinômios g_1, \dots, g_s e a, b pertencem a I e os polinômios c_1, \dots, c_s e $d_1 f, d_2 f$ pertencem a $\mathbb{C}[x, y]$. Logo, $f \in I$. \square

Proposição 3.9. *Seja $I = (a, b) \subset \mathbb{C}[x, y]$ um ideal. Se seu conjunto de zeros $\mathcal{Z}(I) = \{p_1, \dots, p_s\}$ é um conjunto finito e todos estes zeros são simples, então I é radical.*

Demonstração. Seja H_j o ideal radical de $\mathcal{O}_{p_j} I$. Como p_j é um zero simples de I , isto significa que o número de interseção de a e b em p_j é 1. Logo, $\dim(\mathcal{O}_{p_j}/\mathcal{O}_{p_j} I) = 1$. Mas

$$\frac{H_j}{\mathcal{O}_{p_j} I} \subsetneq \frac{\mathcal{O}_{p_j}}{\mathcal{O}_{p_j} I},$$

pois $H_j \subsetneq \mathcal{O}_{p_j}$. Podemos enxergar este fato pensando que $1 \in \mathcal{O}_{p_j}$, mas $1 \notin H_j$. De fato,

se 1 pertencesse a H_j , então teríamos que $1^k = 1 \in \mathcal{O}_{p_j}I$. Mas isto é uma contradição, pois se $1 \in \mathcal{O}_{p_j}I$, então $\mathcal{O}_{p_j}I = \mathcal{O}_{p_j}$ e teríamos $\dim(\mathcal{O}_{p_j}/\mathcal{O}_{p_j}I) = 0$. Então, como $H_j/\mathcal{O}_{p_j}I$ é um subespaço próprio de $\mathcal{O}_{p_j}/\mathcal{O}_{p_j}I$, temos que $\dim(H_j/\mathcal{O}_{p_j}I) = 0$. Isto é, $H_j = \mathcal{O}_{p_j}I$. Mas isto significa que $\mathcal{O}_{p_j}I$ é um ideal radical de \mathcal{O}_{p_j} .

Seja $h \in \sqrt{I} \subset \mathbb{C}[x, y]$. Então $h^k \in I$, para algum $k \geq 1$. Logo, $h^k \in \mathcal{O}_{p_j}I$, já que $I \subset \mathcal{O}_{p_j}I$. Uma vez que $\mathcal{O}_{p_j}I$ é radical, $h \in \mathcal{O}_{p_j}I$. Como este argumento vale para qualquer $j = 1, \dots, s$, $h \in \mathcal{O}_{p_j}I$ para todo j . Logo, pelo lema 3.8, $h \in I$. Portanto, I é radical. \square

Podemos então enunciar uma versão do Teorema de Noether como uma consequência desta proposição. Este teorema será útil não só no desenvolvimento que levará ao Teorema-Chave na próxima seção, mas também no desenvolvimento do segundo algoritmo, no capítulo 5.

Teorema 3.10 (Teorema de Noether). *Seja $I = (a, b) \subset \mathbb{C}[x, y]$ e $\mathcal{Z}(I)$ um conjunto finito em que todos os zeros são simples. Se $f \in \mathbb{C}[x, y]$ zera em todos os pontos de $\mathcal{Z}(I)$, então podemos escrever f na forma*

$$f = Pa + Qb.$$

Demonstração. Como todas os zeros de I são simples, pela proposição 3.9, I é radical. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, se f zera em todos os pontos de $\mathcal{Z}(I)$, então $f \in \sqrt{I}$. Mas como $\sqrt{I} = I$, temos então a equação desejada. \square

3.3 Os Teoremas de Baum-Bott e de Camacho-Sad

Nesta seção iremos introduzir e provar um teorema (que chamaremos de Teorema-Chave) e então utilizá-lo para demonstrar os teoremas 3.5 e 3.6, sob a hipótese particular de que todas as singularidades de um dado campo \mathbf{V} de \mathbb{P}^2 são distintas.

Este Teorema-Chave foi introduzido no artigo [22]. A prova que apresentamos aqui segue, em linhas gerais, a prova desenvolvida nele. Entretanto, introduzimos alguns detalhamentos e clarificações, de forma que acreditamos que ela esteja apresentada aqui de forma mais palatável do que no artigo original.

3.3.1 O Teorema-Chave

Antes de podermos enunciar e provar o Teorema-Chave, precisamos introduzir alguma notação e provar alguns resultados auxiliares.

Assumindo que todas as singularidades de \mathbf{V} possuem coordenada $z \neq 0$, sendo $M \in \text{Sing}(\mathbf{V})$ e V um representante de \mathbf{V} , definimos

$$\kappa_V(M) = \frac{V_z}{z}(M).$$

Seja $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz$ a 1-forma correspondente ao campo \mathbf{V} . Definimos então

$$\Delta_{\mathbf{V}}(M) = \frac{\begin{vmatrix} \partial\omega_x/\partial x & \partial\omega_x/\partial y \\ \partial\omega_y/\partial x & \partial\omega_y/\partial y \end{vmatrix}}{z^2}(M),$$

Temos que $\kappa_V(M)$ depende do representante V escolhido, enquanto $\Delta_{\mathbf{V}}(M)$ depende apenas do campo \mathbf{V} , pois a 1-forma ω não é dependente do representante de \mathbf{V} escolhido.

Lema 3.11. *Seja \mathbf{V} um campo polinomial planar de grau s com singularidades simples. Se um polinômio homogêneo H de grau $2s - 2$ zera em todos os pontos de $\text{Sing}(\mathbf{V})$ menos um, então ele também zera neste último.*

Demonstração. Por uma mudança de coordenadas, podemos supor que todos os pontos de $\text{Sing}(\mathbf{V})$ possuem coordenada $z \neq 0$ (não há singularidades na reta do infinito) e que a singularidade em que não se sabe se H zera é $(0, 0, 1)$.

Denotemos $\bar{P} = P(x, y, 0)$, para qualquer polinômio homogêneo $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Como não há singularidades de \mathbf{V} no infinito, $\omega_x(x, y, 0) = -y\bar{V}_z$, $\omega_y(x, y, 0) = x\bar{V}_z$ e $\omega_z(x, y, 0) = \frac{\bar{y}\bar{V}_x - x\bar{V}_y}{y\bar{V}_x - x\bar{V}_y}$ não podem zera simultaneamente, o que implica que $\text{mdc}(\bar{V}_z, \bar{y}\bar{V}_x - x\bar{V}_y) = 1$. Desta forma, \bar{V}_z é diferente de zero, o que implica que ω_x e ω_y são coprimos.

Os polinômios xH e yH zeram em todas as singularidades de \mathbf{V} . Mas as singularidades de \mathbf{V} são os zeros do ideal $I = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Como todas as singularidades são simples, este ideal é radical, por [22, Proposição 1], e xH e yH pertencem a ele. Logo, levando em consideração a relação $x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z = 0$, podemos encontrar quatro polinômios A , B , C e D de grau $s - 1$ tais que

$$\begin{cases} xzH = A\omega_x + B\omega_y \\ yzH = C\omega_x + D\omega_y. \end{cases}$$

Destas duas equações, deduzimos dois desenvolvimentos para $xyzH$:

$$xyzH = Ay\omega_x + By\omega_y = Cx\omega_x + Dx\omega_y.$$

Desta forma,

$$(Ay - Cx)\omega_x = -(By - Dx)\omega_y.$$

Como ω_x e ω_y são coprimos, $Ay - Cx$ é divisível por ω_y . Entretanto, o seu grau s é menor do que o grau de ω_y , que é $s + 1$. Logo, $Ay - Cx = 0$. Por argumento análogo, temos $By - Dx = 0$.

De $Ay = Cx$, como x não divide y , x divide A . Isto é, $A = xE$. Analogamente, temos que $B = xF$, $C = yE$ e $D = yF$. Temos então

$$xzH = A\omega_x + B\omega_y = xE\omega_x + xF\omega_y.$$

Logo,

$$zH = E\omega_x + F\omega_y.$$

Como $(0, 0, 1)$ é uma singularidade, $\omega_x(0, 0, 1) = \omega_y(0, 0, 1) = 0$. Portanto, H de fato zera também na singularidade $(0, 0, 1)$. \square

Lema 3.12. *Seja \mathbf{V} um campo polinomial planar de grau s com singularidades simples. Então, o espaço vetorial $\mathbb{C}_{2s-2}[x, y, z]$ dos polinômios homogêneos de grau $2s - 2$ nas variáveis x , y e z é gerado por elementos que zeram em todos os pontos de $\text{Sing}(\mathbf{V})$, com exceção de três, no máximo.*

Demonstração. Por uma mudança de coordenadas, podemos supor que todas as singularidades possuem coordenada $z \neq 0$. De acordo com a proposição 3.7, existem $S = s^2 + s + 1$ elementos em $\text{Sing}(\mathbf{V})$. Fixando um representante com $z = 1$ para cada um deles, obtemos um conjunto finito $\bar{\mathcal{E}}$ de S elementos de \mathbb{C}^3 .

Para todo elemento não-nulo M de \mathbb{C}^3 , ε_M é a aplicação de especialização que, para todo polinômio $P \in \mathbb{C}[x, y, z]$, calcula o seu valor no ponto M . Isto é, $\varepsilon_M(P) = P(M)$. Iremos restringir ε_M para o espaço vetorial de dimensão finita $\mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$. A aplicação ε_M é uma transformação linear, pois

$$\varepsilon_M(P + Q) = (P + Q)(M) = P(M) + Q(M) = \varepsilon_M(P) + \varepsilon_M(Q)$$

e

$$\varepsilon_M(\lambda P) = (\lambda P)(M) = \lambda P(M) = \lambda \varepsilon_M(P).$$

Um conjunto finito de elementos de \mathbb{C}^3 é chamado de *conjunto teste* para polinômios homogêneos de grau $s - 1$, se o único polinômio de grau $s - 1$ que zera em todos os pontos do

conjunto é o polinômio 0. Esta definição, por sua vez, implica que o conjunto de aplicações de especialização correspondentes aos pontos de um conjunto teste gera o espaço vetorial dual de $\mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$, como veremos a seguir.

Seja $\Gamma = \mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$. Tomemos um conjunto teste $\{M_i : i = 1, \dots, t\}$ e as aplicações $\varepsilon_j = \varepsilon_{M_j}$. Vamos definir a função $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^t$ como

$$\phi(P) = (\varepsilon_1(P), \dots, \varepsilon_t(P)).$$

Então, o núcleo da aplicação ϕ é

$$N(\phi) = \{P : \varepsilon_j(P) = 0 \text{ para todo } j\} = \{P : P(M_j) = 0 \text{ para todo } j\} = \{0\},$$

já que os pontos M_j formam um conjunto teste. Portanto, ϕ é injetiva. Tomemos então uma aplicação pertencente ao espaço dual de Γ (denotado por Γ^*), isto é, $\lambda : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$. Temos que $\text{Im}(\phi) \subseteq \mathbb{C}^t$ e também que ϕ^{-1} está bem definida em $\text{Im}(\phi)$. Podemos então construir uma aplicação $\Phi : \text{Im}(\phi) \rightarrow \mathbb{C}$ simplesmente como $\Phi = \lambda \circ \phi^{-1}$. Vamos agora construir uma aplicação $\tilde{\Phi} : \mathbb{C}^t \rightarrow \mathbb{C}$ estendendo a aplicação Φ . Seja β uma base de $\text{Im}(\phi)$. Completamos esta base para uma base $\hat{\beta}$ de \mathbb{C}^t . Definimos então a aplicação $\tilde{\Phi}$ para os vetores da base $\hat{\beta}$. Se $v \in \hat{\beta}$, então

$$\tilde{\Phi}(v) = \begin{cases} \Phi(v), & \text{se } v \in \beta \\ 0, & \text{se } v \notin \beta. \end{cases}$$

Se pensarmos nos elementos de \mathbb{C}^t como matrizes coluna, então a aplicação $\tilde{\Phi} : \mathbb{C}^t \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser escrita como uma matriz linha. Seja $\tilde{\Phi} = (a_1, \dots, a_t)$. Podemos, então, definir λ como $\lambda = \tilde{\Phi} \circ \phi$. Logo,

$$\lambda(P) = (a_1, \dots, a_t) \begin{bmatrix} \varepsilon_1(P) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(P) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^t a_i \varepsilon_i(P).$$

Desta forma, qualquer aplicação $\lambda \in \Gamma^*$ pode ser escrita como

$$\lambda = \sum_{i=1}^t a_i \varepsilon_i,$$

o que mostra que o conjunto de aplicações de especialização correspondentes aos pontos de um conjunto teste realmente gera o espaço vetorial dual de $\mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$.

Por razões de grau, um polinômio não-nulo $H \in \mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$ não pode zerar em todos os pontos $M \in \bar{\mathcal{E}}$, pois, neste caso, H pertenceria ao ideal radical $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, que é gerado por polinômios de grau $s + 1$. Isto significa que $\bar{\mathcal{E}}$ é um conjunto teste para $\mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$.

Vamos, agora, calcular a dimensão do espaço vetorial $\mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$. Para isto, basta pensarmos que um polinômio homogêneo de grau $s-1$ em x, y e z pode ser desomogeneizado para um polinômio de grau menor ou igual a $s-1$ em x e y . Tal polinômio é formado por monômios de grau 0 até $s-1$ em x e y . Mas existe um monômio de grau 0, dois monômios de grau 1 (x e y), três monômios de grau 2 (x^2, xy e y^2) e assim sucessivamente até s monômios de grau $s-1$. Logo, a dimensão de $\mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$ é igual a

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^s i = \frac{s(s+1)}{2}.$$

A dimensão do espaço dual também será \bar{s} . Portanto, existe uma base para o espaço dual formada por \bar{s} elementos. Esta base é um subconjunto das aplicações de especialização que geram o espaço dual. Como à cada uma destas aplicações de especialização corresponde um elemento de um conjunto teste, podemos concluir que existe um subconjunto $\bar{\mathcal{E}}_1 = \{M_1, \dots, M_{\bar{s}}\} \subset \bar{\mathcal{E}}$ com \bar{s} elementos que é um conjunto teste mínimo de $\mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$.

Podemos escrever a partir dos pontos $M_i, i = 1, \dots, \bar{s}$, um conjunto de polinômios H_i tais que

$$H_i(M_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Consideremos agora o conjunto finito $\bar{\mathcal{E}} \setminus \bar{\mathcal{E}}_1$ de \mathbb{C}^3 . Mostraremos que este conjunto também é um conjunto teste de $\mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$. De fato, se algum polinômio $H \in \mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$ zerar em todos os elementos de $\bar{\mathcal{E}} \setminus \bar{\mathcal{E}}_1$, então, para todo $M_i \in \bar{\mathcal{E}}_1$, HH_i zera em todas as singularidades com a exceção, possivelmente, de M_i . O grau de HH_i é $2s-2$, logo, de acordo com o lema 3.11, HH_i , e conseqüentemente H , também zera em M_i . Então, como este argumento vale para todos os $M_i, i = 1, \dots, \bar{s}$, H zeraria em todos os pontos de $\text{Sing}(\mathbf{V})$. Neste caso, H pertenceria ao ideal radical $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, que é gerado por polinômios de grau $s+1$. Como o grau de H é $s-1$, isto é uma contradição.

Então, por argumento análogo ao usado anteriormente nesta prova, existe um subconjunto $\bar{\mathcal{E}}_2 = \{\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_{\bar{s}}\} \subset \bar{\mathcal{E}} \setminus \bar{\mathcal{E}}_1$ com \bar{s} elementos que é um conjunto teste mínimo de $\mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$. Portanto, podemos obter outro conjunto de polinômios \bar{H}_i tais que

$$\bar{H}_i(\bar{M}_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Lembrando que o número de singularidades $S = 2\bar{s} + 1$, então $\bar{\mathcal{E}} \setminus (\bar{\mathcal{E}}_1 \cup \bar{\mathcal{E}}_2)$ possui apenas um elemento, que chamaremos de *ponto extra*.

Seja $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ um monômio de $\mathbb{C}_{2s-2}[x, y, z]$, isto é, $\alpha + \beta + \gamma = 2s - 2$. Podemos escrever $x^\alpha y^\beta z^\gamma = Q_1 Q_2$, tal que $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$. Seja $a_i = Q_1(M_i)$ e $b_i = Q_2(\bar{M}_i)$ para $i = 1, \dots, \bar{s}$. Então,

$$(Q_1 - \sum_{i=1}^{\bar{s}} a_i H_i)(M_j) = a_j - a_j = 0,$$

para todos os pontos M_j com $j = 1, \dots, \bar{s}$. Mas estes pontos formam um conjunto teste. Isto significa que o único polinômio que se anula em todos estes pontos é o polinômio nulo. Logo, $Q_1 - \sum a_i H_i = 0$. Isto é, $Q_1 = \sum a_i H_i$. Por um argumento análogo, podemos concluir que $Q_2 = \sum b_i \bar{H}_i$. Temos então que

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = Q_1 Q_2 = \sum a_i b_j H_i \bar{H}_j.$$

Isto significa que qualquer monômio e, portanto, qualquer polinômio de $\mathbb{C}_{2s-2}[x, y, z]$ pode ser escrito em função dos \bar{s}^2 produtos $H_i \bar{H}_j$. Portanto, o espaço vetorial $\mathbb{C}_{2s-2}[x, y, z]$ é gerado por estes produtos. Além disso, cada um destes produtos $H_i \bar{H}_j$ zera em todos os pontos de $\text{Sing}(\mathbf{V})$ com a exceção de M_i, \bar{M}_j e, possivelmente, do ponto extra, ou seja, todas as singularidades com a exceção de três, no máximo. \square

Proposição 3.13. *Seja \mathbf{V} um campo polinomial planar de grau s com singularidades simples. Então, para todo $H \in \mathbb{C}_{2s-2}[x, y, z]$,*

$$\Theta(H) = \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{H}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = 0.$$

Demonstração. Como, de acordo com o lema anterior, o espaço vetorial $\mathbb{C}_{2s-2}[x, y, z]$ é gerado por elementos que zeram em todos os pontos de $\text{Sing}(\mathbf{V})$, com exceção de três, no máximo, e como Θ é linear, basta provarmos o resultado para polinômios com esta característica.

Seja H um polinômio homogêneo de grau $2s - 2$ em $\mathbb{C}[x, y, z]$ que zera em todos os pontos de $\text{Sing}(\mathbf{V})$, com exceção de três, no máximo. Sem perda de generalidade, podemos assumir que as coordenadas foram escolhidas de forma que todas as singularidades possuam coordenada $z \neq 0$. Podemos supor também que as três singularidades particulares em que H possivelmente não zera são $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 0, 1)$.

Seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $y - \lambda x$ não divida \bar{V}_z . Definimos então dois polinômios homogêneos de $\mathbb{C}[x, y, z]$, $\phi = x(y - \lambda x + \lambda z)$ e $\psi = y(y - \lambda x - z)$, que zeram nas três singularidades

particulares. Então, os polinômios ϕH e ψH zeram em todas as singularidades de \mathbf{V} . Logo, podemos encontrar quatro polinômios A , B , C e D de grau s tais que

$$\begin{cases} \phi zH = A\omega_x + B\omega_y \\ \psi zH = C\omega_x + D\omega_y. \end{cases} \quad (3.7)$$

Portanto, $\phi\psi zH = \psi(A\omega_x + B\omega_y) = \phi(C\omega_x + D\omega_y)$, ou, colocando-se de outra forma, $(\psi A - \phi C)\omega_x = (\phi D - \psi B)\omega_y$. Como ω_x e ω_y são coprimos, temos que existe um polinômio linear L tal que

$$\begin{cases} L\omega_x = D\phi - B\psi \\ L\omega_y = -C\phi + A\psi. \end{cases} \quad (3.8)$$

Multiplicando a primeira equação do sistema 3.7 por L , obtemos $\phi zLH = AL\omega_x + BL\omega_y$. Substituindo $L\omega_x$ e $L\omega_y$ nesta equação pelos seus valores no sistema acima, obtemos

$$\phi zLH = A(D\phi - B\psi) + B(-C\phi + A\psi) = AD\phi - AB\psi - BC\phi + AB\psi = (AD - BC)\phi.$$

Logo,

$$zLH = AD - BC. \quad (3.9)$$

Tomando a derivada parcial com respeito a x da primeira equação do sistema linear 3.7 e tomando seu valor nas três singularidades particulares, em que ω_x , ω_y , ϕ e ψ zeram, obtemos as seguintes igualdades, válidas nestes três pontos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi zH)}{\partial x} &= zH \frac{\partial\phi}{\partial x} + z\phi \frac{\partial H}{\partial x} = zH \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial(A\omega_x + B\omega_y)}{\partial x} &= A \frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \omega_x \frac{\partial A}{\partial x} + B \frac{\partial\omega_y}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial B}{\partial x} = A \frac{\partial\omega_x}{\partial x} + B \frac{\partial\omega_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga com a derivada parcial com respeito a y da primeira equação e com as duas derivadas parciais (com respeito a x e y) da segunda equação do sistema, e escrevendo os resultados de forma matricial, obtemos

$$zH \begin{bmatrix} \partial\phi/\partial x & \partial\phi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial\omega_x/\partial x & \partial\omega_x/\partial y \\ \partial\omega_y/\partial x & \partial\omega_y/\partial y \end{bmatrix},$$

de onde pode ser deduzida uma relação entre determinantes que é válida nas três singula-

ridades particulares:

$$z^2 H^2 \begin{vmatrix} \partial\phi/\partial x & \partial\phi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \end{vmatrix} = (AD - BC) \begin{vmatrix} \partial\omega_x/\partial x & \partial\omega_x/\partial y \\ \partial\omega_y/\partial x & \partial\omega_y/\partial y \end{vmatrix}.$$

Substituindo a equação 3.9 na equação acima, obtemos

$$z^2 H^2 \begin{vmatrix} \partial\phi/\partial x & \partial\phi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \end{vmatrix} = LzH \begin{vmatrix} \partial\omega_x/\partial x & \partial\omega_x/\partial y \\ \partial\omega_y/\partial x & \partial\omega_y/\partial y \end{vmatrix}.$$

Obtemos então a igualdade

$$\frac{zH}{\begin{vmatrix} \partial\omega_x/\partial x & \partial\omega_x/\partial y \\ \partial\omega_y/\partial x & \partial\omega_y/\partial y \end{vmatrix}} = \frac{L}{\begin{vmatrix} \partial\phi/\partial x & \partial\phi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \end{vmatrix}},$$

que é equivalente a

$$\frac{H}{\Delta_{\mathbf{v}}} = \frac{zL}{\begin{vmatrix} \partial\phi/\partial x & \partial\phi/\partial y \\ \partial\psi/\partial x & \partial\psi/\partial y \end{vmatrix}}. \quad (3.10)$$

Mas o quociente $H/\Delta_{\mathbf{v}}$ zera em todas as singularidades com a exceção, possivelmente, de $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 0, 1)$, onde é dado pela fração acima. Precisamos apenas mostrar que o somatório desta fração nestes três pontos também é nulo para provar a proposição.

Tomando a primeira equação do sistema 3.8 em $z = 0$, obtemos

$$-\bar{L}y\bar{V}_z = \bar{D}\bar{\phi} - \bar{B}\bar{\psi} = \bar{D}x(y - \lambda x) - \bar{B}y(y - \lambda x) = (y - \lambda x)(\bar{D}x - \bar{B}y).$$

Logo, $y - \lambda x$ divide $\bar{L}y\bar{V}_z$. Mas como $y - \lambda x$ não divide y e também não divide \bar{V}_z pela hipótese feita na escolha de λ , então $y - \lambda x$ divide \bar{L} . Então, por L ser um polinômio linear,

$$L = c_1 z + c_2(y - \lambda x),$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Seja

$$\bar{J}(p) = \begin{vmatrix} (\partial\phi/\partial x)(p) & (\partial\phi/\partial y)(p) \\ (\partial\psi/\partial x)(p) & (\partial\psi/\partial y)(p) \end{vmatrix}$$

Temos

$$\begin{aligned}\bar{J}(0,0,1) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda, & \bar{J}(0,1,1) &= \begin{vmatrix} 1+\lambda & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+\lambda \quad \text{e} \\ \bar{J}(1,0,1) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1).\end{aligned}$$

Então, o somatório do quociente 3.10 nas três singularidades particulares é

$$c_1 \left(-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1+\lambda} + \frac{1}{\lambda(1+\lambda)} \right) + c_2 \left(-\frac{0}{\lambda} + \frac{1}{1+\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda(1+\lambda)} \right) = 0,$$

o que prova a proposição. □

Proposição 3.14. *Seja \mathbf{V} um campo polinomial planar de grau $s \geq 2$ com singularidades simples. Então, para todo $H \in \mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$ e para todo representante V de \mathbf{V} ,*

$$\sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\kappa_V H}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = 0.$$

Demonstração. Como já é usual, sem perda de generalidade, podemos assumir que as coordenadas foram escolhidas de forma que todas as singularidades possuam coordenada $z \neq 0$.

Como, por hipótese, $s \geq 2$, o grau de H é pelo menos um e ele pode ser escrito como $H = zH_1 + H_2$, onde H_1 é um polinômio homogêneo de $\mathbb{C}[x, y, z]$ e H_2 é um polinômio homogêneo de $\mathbb{C}[x, y]$. H_2 também possui grau pelo menos um e pode ser escrito como $H_2 = xH_3 + \sigma y^{s-1}$, onde H_3 é um polinômio homogêneo de $\mathbb{C}[x, y]$ e σ é uma constante que pode, possivelmente, ser nula. Temos então

$$V_z H = zV_z H_1 + xV_z H_3 + \sigma y^{s-1} V_z.$$

Lembrando que $\omega_x = zV_y - yV_z$ e $\omega_y = xV_z - zV_x$, podemos substituir xV_z e yV_z na equação acima, obtendo

$$\begin{aligned}V_z H &= zV_z H_1 + (\omega_y + zV_x)H_3 + \sigma y^{s-2}(zV_y - \omega_x) = \\ &= z(V_z H_1 + V_x H_3 + V_y \sigma y^{s-2}) + H_3 \omega_y - \sigma y^{s-2} \omega_x.\end{aligned}$$

Seja $H' = V_z H_1 + V_x H_3 + V_y \sigma y^{s-2}$, $A = -\sigma y^{s-2}$ e $B = H_3$. Note que H' é um polinômio

homogêneo de grau $2s - 2$. Temos então que

$$V_z H - z H' = A \omega_x + B \omega_y.$$

Como em uma singularidade $\omega_x = \omega_y = 0$,

$$\sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{(V_z H - z H')}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{(A \omega_x + B \omega_y)}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = 0.$$

Logo,

$$0 = \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{(V_z H - z H')}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{V_z H}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) - \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{z H'}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M).$$

Como todas as singularidades estão fora da reta no infinito, podemos realizar estes somatórios sobre representantes M_i que tenham coordenada $z = 1$. Desta forma, temos que

$$\sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{z H'}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{H'}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = 0,$$

onde a segunda igualdade segue da proposição 3.13, já que H' é homogêneo de grau $2s - 2$.

Lembrando que $\kappa_{\mathbf{V}} = V_z/z$, e que estamos realizando os somatórios sobre representantes M_i que tenham coordenada $z = 1$, temos

$$\sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\kappa_{\mathbf{V}} H}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{V_z H}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{z H'}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = 0,$$

o que prova a proposição. □

Proposição 3.15. *Seja \mathbf{V} um campo polinomial planar de grau s com singularidades simples. Existem dois representantes V_1 e V_2 de \mathbf{V} tais que o produto $\kappa_{V_1} \kappa_{V_2}$ zera em todos os pontos de $\text{Sing}(\mathbf{V})$ com a exceção de um, M_0 , e*

$$\sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\kappa_{V_1} \kappa_{V_2}}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = \left(\frac{\kappa_{V_1} \kappa_{V_2}}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M_0) = 1.$$

Demonstração. Como já é usual, sem perda de generalidade, podemos assumir que as coordenadas foram escolhidas de forma que todas as singularidades possuam coordenada $z \neq 0$.

Começamos com qualquer representante $V = (V_x, V_y, V_z)$ de \mathbf{V} . De acordo com a demonstração do lema 3.12, existe uma partição de $\text{Sing}(\mathbf{V})$ em dois conjuntos teste de

$\mathbb{C}_{s-1}[x, y, z]$ e um conjunto unitário (contendo o ponto extra).

Seja $a_i = V_z(M_i)$ e $b_i = V_z(\overline{M}_i)$, lembrando que M_i são os pontos do primeiro conjunto teste e \overline{M}_i são os pontos do segundo conjunto teste, e que todos estes pontos foram escolhidos de forma que tenham coordenada $z = 1$. Então, fazemos $P_1 = \sum a_i H_i$. Desta forma, $P_1(M_j) = \sum a_i H_i(M_j) = a_j = V_z(M_j)$. Analogamente, fazemos $P_2 = \sum b_i \overline{H}_i$. Temos então que $V_{1z} = V_z - zP_1$ zera no primeiro conjunto teste e $V_{2z} = V_z - zP_2$ zera no segundo conjunto teste.

Então o produto $H = (V_z - zP_1)(V_z - zP_2)$ zera em todas as singularidades de \mathbf{V} com a exceção de uma e o mesmo acontece com o produto $\kappa_{V_1}\kappa_{V_2}$ já que

$$\kappa_{V_1}\kappa_{V_2} = \frac{(V_{1z}V_{2z})}{z^2} = \frac{H}{z^2}.$$

Uma mudança de coordenadas afim em x e y nos permite colocar o ponto extra em $(0, 0, 1)$. Além disso, como \overline{V}_z possui um número finito de fatores irredutíveis de grau 1, esta mudança de coordenadas pode ser feita de modo que x e y não dividam \overline{V}_z .

O somatório envolvido se reduz a um termo e temos que provar que este termo é igual a 1.

$$\left(\frac{\kappa_{V_1}\kappa_{V_2}}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (0, 0, 1) = \left(\frac{H}{z^2 \Delta_{\mathbf{V}}} \right) (0, 0, 1) = \frac{(V_z - zP_1)(V_z - zP_2)}{\begin{vmatrix} \partial\omega_x/\partial x & \partial\omega_x/\partial y \\ \partial\omega_y/\partial x & \partial\omega_y/\partial y \end{vmatrix}} (0, 0, 1)$$

Os polinômios xH e yH zeram em todos os pontos de $\text{Sing}(\mathbf{V})$. Logo, podemos encontrar quatro polinômios A, B, C e D de grau $s + 1$ tais que

$$\begin{cases} xzH = A\omega_x + B\omega_y \\ yzH = C\omega_x + D\omega_y. \end{cases} \quad (3.11)$$

Tomando este sistema em $z = 0$, obtemos

$$\begin{cases} 0 = -\overline{A}y\overline{V}_z + \overline{B}x\overline{V}_z \\ 0 = -\overline{C}y\overline{V}_z + \overline{D}x\overline{V}_z, \end{cases}$$

o que implica que existem dois polinômios homogêneos \overline{E} e \overline{F} de grau s tais que $\overline{A} = x\overline{E}$, $\overline{B} = y\overline{E}$, $\overline{C} = x\overline{F}$ e $\overline{D} = y\overline{F}$. Levando isto em consideração, substituindo H , ω_x e ω_y pelas fórmulas que os definem, escrevendo $A = \overline{A} + zA'$, $B = \overline{B} + zB'$, $C = \overline{C} + zC'$ e $D = \overline{D} + zD'$, desenvolvendo os cálculos e, finalmente, tomando $z = 0$, obtemos, a partir

do sistema 3.11,

$$\begin{cases} x\overline{V}_z^2 = -\overline{A}'y\overline{V}_z + \overline{B}'x\overline{V}_z + (\overline{xV}_y - \overline{yV}_x)\overline{E} \\ y\overline{V}_z^2 = -\overline{C}'y\overline{V}_z + \overline{D}'x\overline{V}_z + (\overline{xV}_y - \overline{yV}_x)\overline{F}. \end{cases}$$

Como \overline{V}_z e $\overline{xV}_y - \overline{yV}_x$ são coprimos, pois não existem singularidades no infinito, \overline{V}_z divide \overline{E} e \overline{F} . Logo, existem $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$ tais que $\overline{E} = K_1\overline{V}_z$ e $\overline{F} = K_2\overline{V}_z$.

Substituindo então no sistema 3.11 A por $A - K_1\omega_y$, B por $B + K_1\omega_x$, C por $C - K_2\omega_y$ e D por $D + K_2\omega_x$ não alteramos a validade das duas igualdades do sistema, mas obtemos polinômios divisíveis por z . Dividindo então as duas equações do sistema por z , obtemos

$$\begin{cases} xH = a\omega_x + b\omega_y \\ yH = c\omega_x + d\omega_y, \end{cases} \quad (3.12)$$

onde a , b , c e d possuem grau s . Temos então que $xyH = ay\omega_x + by\omega_y = cx\omega_x + dx\omega_y$, ou, escrito de outra forma, $(ay - cx)\omega_x = (dx - by)\omega_y$. Como ω_x e ω_y são coprimos, então, por esta equação, existe um $\sigma \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{cases} \sigma\omega_x = dx - by \\ \sigma\omega_y = -cx + ay. \end{cases} \quad (3.13)$$

Substituindo os valores de ω_x e ω_y deste sistema na primeira equação do sistema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} xH &= a\omega_x + b\omega_y = a\frac{(dx - by)}{\sigma} + b\frac{(ay - cx)}{\sigma} \\ \sigma xH &= adx - aby + aby - bcx = (ad - bc)x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma H = ad - bc.$$

Tomando a derivada parcial com respeito a x da primeira equação do sistema linear 3.13 e tomando seu valor no ponto $(0, 0, 1)$, temos

$$\sigma \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = x \frac{\partial d}{\partial x} + d - y \frac{\partial b}{\partial x} = d.$$

Procedendo de forma análoga com a derivada parcial com respeito a y da primeira equação e com as duas derivadas parciais (com respeito a x e y) da segunda equação do sistema, e

escrevendo os resultados em forma matricial, obtemos

$$\sigma \begin{bmatrix} \partial\omega_x/\partial x & \partial\omega_x/\partial y \\ \partial\omega_y/\partial x & \partial\omega_y/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

donde pode ser deduzida uma relação entre determinantes que é válida no ponto $(0, 0, 1)$:

$$\sigma^2 \begin{vmatrix} \partial\omega_x/\partial x & \partial\omega_x/\partial y \\ \partial\omega_y/\partial x & \partial\omega_y/\partial y \end{vmatrix} = (ad - bc) = \sigma H.$$

Temos então que

$$\frac{H}{\begin{vmatrix} \partial\omega_x/\partial x & \partial\omega_x/\partial y \\ \partial\omega_y/\partial x & \partial\omega_y/\partial y \end{vmatrix}}(0, 0, 1) = \sigma.$$

Para provar a proposição basta apenas mostrarmos que $\sigma = 1$.

Tomando o sistema 3.12 em $z = 0$, obtemos

$$\begin{cases} x(\overline{V}_z)^2 = -\overline{a}y\overline{V}_z + \overline{b}x\overline{V}_z \\ y(\overline{V}_z)^2 = -\overline{c}y\overline{V}_z + \overline{d}x\overline{V}_z. \end{cases} \quad (3.14)$$

Como x e y não dividem \overline{V}_z , podemos obter do sistema acima que $\overline{a} = xa'$ e $\overline{d} = yd'$.

Tomando o sistema 3.13 em $z = 0$, temos

$$\begin{cases} \sigma\overline{V}_z = -xd' + \overline{b} \\ \sigma\overline{V}_z = ya' - \overline{c}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Somando as duas equações do sistema 3.14, obtemos

$$2\overline{V}_z = (\overline{b} - \overline{c}) + (d'x - a'y). \quad (3.16)$$

Somamos também as duas equações do sistema 3.15, resultando em

$$2\sigma\overline{V}_z = (\overline{b} - \overline{c}) + (a'y - d'x). \quad (3.17)$$

Somando então estas duas equações, encontramos

$$\overline{b} - \overline{c} = (\sigma + 1)\overline{V}_z. \quad (3.18)$$

Finalmente, subtraindo esta última equação da equação 3.17, temos como resultado

$$a'y - d'x = (\sigma - 1)\overline{V}_z. \quad (3.19)$$

Montamos um sistema com as equações 3.18, 3.19 e as equações do sistema 3.15:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{c} \\ ya' \\ xd' \end{bmatrix} = \overline{V}_z \begin{bmatrix} \sigma + 1 \\ \sigma - 1 \\ \sigma \\ \sigma \end{bmatrix}.$$

A matriz 4×4 é inversível. Desta forma, ya' e xd' são múltiplos de \overline{V}_z . Mas ya' e xd' possuem o mesmo grau (s) de \overline{V}_z . Como x e y não dividem \overline{V}_z , pela hipótese feita no início desta prova, concluímos que $a' = d' = 0$. Então, da segunda linha da matriz, $0 = (\sigma - 1)\overline{V}_z$. Como $\overline{V}_z \neq 0$, temos que $\sigma = 1$, o que prova a proposição. \square

Podemos, agora, apresentar e provar o Teorema-Chave desta seção.

Teorema 3.16 (Teorema-Chave). *Seja \mathbf{V} um campo polinomial planar de grau $s \geq 2$ cujas singularidades são todas distintas no plano projetivo \mathbb{P}^2 . Então, para todos os pares $[V_1, V_2]$ de representantes de \mathbf{V} ,*

$$\sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\kappa_{V_1} \kappa_{V_2}}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = 1.$$

Demonstração. De acordo com a proposição 3.15, existem dois representantes \hat{V}_1 e \hat{V}_2 de \mathbf{V} tais que

$$\sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\kappa_{\hat{V}_1} \kappa_{\hat{V}_2}}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = 1.$$

Mas todos os representantes de \mathbf{V} são iguais a menos de uma soma de um múltiplo do campo de Euler. Logo, temos que $V_1 = \hat{V}_1 + H_1E$ e $V_2 = \hat{V}_2 + H_2E$. Desta forma,

$$\kappa_{V_1} \kappa_{V_2} = \frac{V_{1z}}{z} \frac{V_{2z}}{z} = \frac{(\hat{V}_{1z} + H_1z)}{z} \frac{(\hat{V}_{2z} + H_2z)}{z} = \kappa_{\hat{V}_1} \kappa_{\hat{V}_2} + \kappa_{\hat{V}_1} H_2 + H_1 \kappa_{\hat{V}_2} + H_1 H_2.$$

Então,

$$\sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\kappa_{V_1} \kappa_{V_2}}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\kappa_{\hat{V}_1} \kappa_{\hat{V}_2}}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) +$$

$$+ \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\kappa_{\hat{V}_1} H_2}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) + \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{H_1 \kappa_{\hat{V}_2}}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) + \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{H_1 H_2}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M).$$

Mas a primeira parcela desta soma é igual a 1 pela proposição 3.15, a última parcela é igual a zero pela proposição 3.13 e, como $s \geq 2$, a segunda e a terceira parcelas são iguais a zero pela proposição 3.14, o que prova o teorema. \square

3.3.2 Obtenção das Fórmulas de Baum-Bott e Camacho-Sad

Podemos agora, utilizando o Teorema-Chave, provar os teoremas 3.5 e 3.6 sob a hipótese particular de que todas as singularidades de um dado campo \mathbf{V} de \mathbb{P}^2 são distintas.

3.3.2.1 A Fórmula de Baum-Bott

Seja $V = (V_x, V_y, V_z)$, um representante do campo \mathbf{V} de grau $s \geq 2$ de \mathbb{P}^2 , com a característica particular de que seu divergente é nulo, isto é,

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Conforme vimos anteriormente, a 1-forma correspondente a um campo de \mathbb{P}^2 é

$$\omega = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz = (V_y z - V_z y) dx + (V_z x - V_x z) dy + (V_x y - V_y x) dz.$$

Como já é usual, vamos assumir, sem perda de generalidade, que todas as singularidades de \mathbf{V} possuem coordenada $z \neq 0$. Vamos, então, desomogeneizar o campo V com relação a z . Para isto, fazemos

$$\begin{aligned} v(x, y) &= (zV - V_z E)(x, y, 1) = ((zV_x, zV_y, zV_z) - (xV_z, yV_z, zV_z))(x, y, 1) = \\ &= (zV_x - xV_z, zV_y - yV_z, 0)(x, y, 1) = (-\omega_y, \omega_x, 0)(x, y, 1). \end{aligned}$$

Temos então um campo vetorial em \mathbb{C}^2 definido como $v(x, y) = (-\omega_y(x, y, 1), \omega_x(x, y, 1))$.

O seu jacobiano é

$$J(p) = \begin{bmatrix} -\partial\omega_y/\partial x & -\partial\omega_y/\partial y \\ \partial\omega_x/\partial x & \partial\omega_x/\partial y \end{bmatrix}_{z=1}.$$

Supondo que o campo é não degenerado, isto é, que $\det(J) \neq 0$ em todas as suas singularidades, a fórmula de Baum-Bott consiste no cálculo do valor do somatório do índice $\frac{\text{tr}(J(p))^2}{\det(J(p))}$ sobre todas as singularidades do campo.

Vamos começar calculando o valor do traço do jacobiano acima:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(J(p)) &= \frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = \frac{\partial(V_y z - V_z y)}{\partial y} - \frac{\partial(V_z x - V_x z)}{\partial x} = \\ &= z \frac{\partial V_y}{\partial y} - y \frac{\partial V_z}{\partial y} - V_z - x \frac{\partial V_z}{\partial x} - V_z + z \frac{\partial V_x}{\partial x} = z \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) - y \frac{\partial V_z}{\partial y} - x \frac{\partial V_z}{\partial x} - 2V_z.\end{aligned}$$

Como o divergente de V é nulo, temos que

$$\operatorname{tr}(J(p)) = -z \frac{\partial V_z}{\partial z} - y \frac{\partial V_z}{\partial y} - x \frac{\partial V_z}{\partial x} - 2V_z.$$

A fórmula de Euler diz que, se F é um polinômio homogêneo de $\mathbb{C}[x, y, z]$, então

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = nF,$$

onde $n = \deg(F)$. Portanto, a fórmula acima pode ser reescrita como

$$\operatorname{tr}(J(p)) = -sV_z - 2V_z = -(s+2)V_z.$$

Temos então $\operatorname{tr}(J(p)) = -(s+2)V_z$. Por outro lado, pela definição de $\Delta_{\mathbf{V}}$, temos que $\det(J(p)) = z^2 \Delta_{\mathbf{V}}$. Vamos então desenvolver o índice de Baum-Bott utilizando estes resultados:

$$\frac{\operatorname{tr}(J(p))^2}{\det(J(p))} = \frac{(s+2)^2 V_z^2}{z^2 \Delta_{\mathbf{V}}}.$$

Como $\kappa_V = V_z/z$,

$$\frac{(s+2)^2 V_z^2}{z^2 \Delta_{\mathbf{V}}} = \frac{(s+2)^2 \kappa_V^2}{\Delta_{\mathbf{V}}}.$$

Podemos, agora, calcular o somatório dos índices de Baum-Bott (conforme definidos na página 22) sobre todas as singularidades do campo:

$$\begin{aligned}\sum_{M \in \operatorname{Sing}(\mathbf{V})} BB(M) &= \sum_{M \in \operatorname{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\operatorname{tr}(J(M))^2}{\det(J(M))} \right) = \sum_{M \in \operatorname{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{(s+2)^2 \kappa_V^2}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = \\ &= (s+2)^2 \sum_{M \in \operatorname{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\kappa_V^2}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M).\end{aligned}$$

Mas, no caso em que todas as singularidades são distintas, pelo Teorema-Chave, este último somatório é igual a 1, logo

$$\sum_{M \in \operatorname{Sing}(\mathbf{V})} BB(M) = (s+2)^2,$$

o que prova o teorema 3.5 sob as hipóteses em que ele será utilizado nesta dissertação.

3.3.2.2 A Fórmula de Camacho-Sad

Seja $X = A\partial/\partial x + B\partial/\partial y + C\partial/\partial z$ uma derivação homogênea de \mathbb{C}^3 correspondente a um campo \mathbf{V} de \mathbb{P}^2 , $F \subset \mathbb{P}^2$ uma solução algébrica deste campo ($\deg(F) = m$) e $f(x, y) = F(x, y, 1) \subset \mathbb{C}^2$. Temos então $X(F) = GF$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que todas as singularidades do campo possuem coordenada $z \neq 0$. Seja $\overline{C} = \mathcal{Z}(F)$. Para o teorema de Camacho-Sad, precisamos separar as singularidades p de \mathbf{V} em dois grupos: as singularidades que estão contidas na curva \overline{C} e as que não estão. Vamos analisar os dois casos separadamente. Em ambos, iremos supor que $\nabla f(p) \neq 0$ (f não singular em p).

Começamos com as singularidades que estão contidas em \overline{C} . Seja $p \in \text{Sing}(\mathbf{V}) \cap \overline{C}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\nabla f(p) \cdot (1, 0) = 0$ (f tangente a $(1, 0)$ em p), que as coordenadas foram escolhidas de forma que $p = (0, 0, 1)$ e que os autovetores do jacobiano do campo em \mathbb{C}^2 no ponto p sejam $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Neste caso, temos que, a menos de uma multiplicação por uma constante não nula,

$$f = y + \tilde{f}, \quad (3.20)$$

onde $\deg(\tilde{f}) \geq 2$.

Desomogeneizando X em relação a z , obtemos

$$\begin{aligned} \hat{X} &= (zX - CE)(x, y, 1) = (zA - Cx)(x, y, 1)\frac{\partial}{\partial x} + (zB - Cy)(x, y, 1)\frac{\partial}{\partial y} = \\ &= a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

onde $a = (zA - Cx)(x, y, 1)$ e $b = (zB - Cy)(x, y, 1)$. Temos também, pela fórmula de Euler, que

$$\begin{aligned} \hat{X}(f) &= (zX(F) - CE(F))(x, y, 1) = G(x, y, 1)F(x, y, 1) - C(x, y, 1)mF(x, y, 1) = \\ &= (G(x, y, 1) - mC(x, y, 1))f(x, y) = \hat{G}(x, y, 1)f(x, y). \end{aligned}$$

Seja $\hat{g}(x, y) = \hat{G}(x, y, 1)$. Desenvolvendo a fórmula acima em p , obtemos

$$\hat{X}(f)(p) = a\frac{\partial f}{\partial x}(p) + b\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \hat{g}(p)f(p).$$

Substituímos, então, a equação 3.20 na equação acima:

$$a \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(p) + b(1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(p)) = \hat{g}(p)f(p). \quad (3.21)$$

Tomemos agora o jacobiano do campo expresso pela derivação \hat{X} no ponto p . Como os autovetores de $J(p)$ são $(1, 0)$ e $(0, 1)$, temos que

$$J(p) = \begin{bmatrix} \partial a / \partial x & \partial a / \partial y \\ \partial b / \partial x & \partial b / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\frac{\partial a}{\partial x}(0, 0, 1) = \lambda_1 \text{ e } \frac{\partial a}{\partial y}(0, 0, 1) = 0.$$

Logo, $a = \lambda_1 x + a_1$, onde $\deg(a_1) \geq 2$. De forma semelhante, temos que $b = \lambda_2 y + b_1$, onde $\deg(b_1) \geq 2$.

Igualando então os componentes de grau 1 na equação 3.21, temos

$$\lambda_2 y = \hat{g}(0, 0)y.$$

Então, $\lambda_2 = \hat{g}(0, 0) = G(0, 0, 1) - mC(0, 0, 1)$.

Tomemos agora, um outro representante para o campo descrito por X . Seja $\tilde{X} = X - (G/m)E$. Então,

$$\begin{aligned} \kappa_{\tilde{X}}(0, 0, 1) &= \frac{\tilde{X}_z}{z}(0, 0, 1) = \frac{mC(0, 0, 1) - G(0, 0, 1)}{m} = \\ &= \frac{mC(0, 0, 1) - \lambda_2 - mC(0, 0, 1)}{m} = -\frac{\lambda_2}{m} \end{aligned}$$

e $\Delta_{\mathbf{V}}(0, 0, 1) = \lambda_1 \lambda_2$.

Portanto, para todo ponto $p \in \text{Sing}(\mathbf{V}) \cap \overline{C}$, temos que

$$\left(\frac{\kappa_{\tilde{X}}^2}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (p) = \frac{\lambda_2^2}{m^2 \lambda_1 \lambda_2} = \frac{\lambda_2}{m^2 \lambda_1}.$$

Vamos considerar agora as singularidades que não estão contidas em \overline{C} . Seja $p \in \text{Sing}(\mathbf{V})$, mas $p \notin \overline{C}$. Da mesma maneira que no caso anterior, podemos assumir que as coordenadas foram escolhidas de forma que $p = (0, 0, 1)$.

Vamos agora igualar as componentes de grau 0 na equação 3.21. Temos

$$0 = \hat{g}(0, 0)f(0, 0) = \hat{G}(0, 0, 1)F(0, 0, 1).$$

Mas $F(0, 0, 1) \neq 0$, pois $p \notin \overline{C}$. Então $\hat{G}(0, 0, 1) = 0$. Temos então que

$$0 = \hat{G}(0, 0, 1) = G(0, 0, 1) - mC(0, 0, 1).$$

Logo,

$$\kappa_{\tilde{X}}(0, 0, 1) = \frac{\tilde{X}_z}{z}(0, 0, 1) = \frac{mC(0, 0, 1) - G(0, 0, 1)}{m} = 0$$

Portanto, para todo ponto p tal que $p \in \text{Sing}(\mathbf{V})$, mas $p \notin \overline{C}$, temos que

$$\left(\frac{\kappa_{\tilde{X}}^2}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (p) = 0.$$

Quando $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$, podemos definir o índice de Camacho-Sad como $CS(\overline{C}, p) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, onde o vetor tangente a \overline{C} em p é um autovetor de λ_2 com respeito ao jacobiano de \mathbf{V} em p . Sob esta hipótese e no caso em que todas as singularidades são distintas temos então, pelo Teorema-Chave, que

$$1 = \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V})} \left(\frac{\kappa_{\tilde{X}}^2}{\Delta_{\mathbf{V}}} \right) (M) = \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V}) \cap \overline{C}} \left(\frac{\lambda_2}{m^2 \lambda_1} \right) (M) = \frac{1}{m^2} \sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V}) \cap \overline{C}} CS(\overline{C}, M).$$

Desta forma,

$$\sum_{M \in \text{Sing}(\mathbf{V}) \cap \overline{C}} CS(\overline{C}, M) = m^2 = \text{deg}(\overline{C})^2,$$

o que prova o teorema 3.6 sob as hipóteses em que ele será utilizado nesta dissertação.

Capítulo 4

O Primeiro Algoritmo

“A internet não foi criada para a difusão de baboseiras. Ela deveria ajudar pesquisadores em diferentes universidades a compartilhar conjuntos de dados. Eu estou falando sério!” - Homer Simpson

Neste capítulo, iremos apresentar o primeiro de dois algoritmos com o objetivo de estabelecer uma abordagem eficiente para o problema da determinação de campos vetoriais sem solução algébrica no plano afim. Para tanto, usaremos os conceitos discutidos até este ponto da dissertação.

4.1 As Singularidades no Infinito

Vamos começar nossa análise pelas singularidades no infinito. Como as singularidades no infinito (singularidades da forma $(x, y, 0)$) são descritas pela equação $ya_n - xb_n = 0$, se houvesse uma singularidade com coordenada $z = 0$ e coordenada $x = 0$, ela poderia ser escrita na forma $(0, 1, 0)$ em \mathbb{P}^2 . Substituindo este valor na equação acima, teríamos $a_n(0, 1) = 0$, o que é uma contradição com a hipótese 3.1, item 4 (página 18). Logo, todas as singularidades de Ω em $z = 0$ possuem coordenada x não-nula. Então elas podem ser escritas na forma $(1, y, 0)$. Pelo item 3 da mesma hipótese, existem exatamente $n + 1$ singularidades distintas desta forma em $z = 0$. No conjunto aberto $x \neq 0$, a folheação \mathcal{F} (como definida na página 19) é gerada pela 1-forma obtida fazendo-se $x = 1$ na equação 3.2. A 1-forma resultante corresponde então à seguinte derivação

$$(y\hat{a} - \hat{b})\frac{\partial}{\partial y} + z\hat{a}\frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.1)$$

onde

$$\hat{a} = a^h(1, y, z) \quad \text{e} \quad \hat{b} = b^h(1, y, z).$$

Então,

$$\hat{a}(y, 0) = a_n(1, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \hat{a}}{\partial y}(y, 0) = \frac{\partial a_n}{\partial y}(1, y),$$

e fórmulas semelhantes são válidas para \hat{b} . Logo,

$$\frac{\partial(y\hat{a} - \hat{b})}{\partial y}(y, 0) = a_n(1, y) + y \frac{\partial a_n}{\partial y}(1, y) - \frac{\partial b_n}{\partial y}(1, y),$$

enquanto

$$\frac{\partial(z\hat{a})}{\partial y}(y, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial(z\hat{a})}{\partial z}(y, 0) = a_n(1, y).$$

Portanto, o jacobiano

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(y\hat{a} - \hat{b})}{\partial y}(y, 0) & \frac{\partial(y\hat{a} - \hat{b})}{\partial z}(y, 0) \\ \frac{\partial(z\hat{a})}{\partial y}(y, 0) & \frac{\partial(z\hat{a})}{\partial z}(y, 0) \end{bmatrix}$$

do campo vetorial correspondente à derivação 4.1 em uma singularidade $(1, y, 0)$ de Ω é uma matriz triangular. Desta forma, seus autovalores são iguais a

$$\lambda_1 = a_n(1, y) + y \frac{\partial a_n}{\partial y}(1, y) - \frac{\partial b_n}{\partial y}(1, y) \quad \text{e} \quad \lambda_2 = a_n(1, y). \quad (4.2)$$

Estes são polinômios apenas na variável y . Além disso, se

$$P(y) = ya_n(1, y) - b_n(1, y),$$

o primeiro dos dois polinômios em 4.2 é igual à derivada $P' = dP/dy$. Em particular, se para alguma singularidade $(1, y_0, 0)$ de Ω o quociente λ_1/λ_2 entre estes autovalores é um número r , então $Q(y_0, r) = 0$, onde

$$Q(y, t) = P'(y) - ta_n(1, y).$$

Portanto, todos os estes números r são raízes da resultante

$$R_1(t) = \text{Res}_y(P, Q),$$

que é um polinômio de grau $n + 1$. Denotemos por $(-1)^k q_k$ o quociente entre o coeficiente de grau k e o coeficiente líder de R_1 . Então q_n é a soma das raízes de R_1 .

Proposição 4.1. *Seja $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2$ uma solução algébrica de \mathcal{F} . Se R_1 não possui raízes*

racionais e

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap \overline{C} \subset L_\infty \quad (4.3)$$

então $q_n = (n + 1)^2$.

Demonstração. Primeiramente, note que $a_n(1, y_0) \neq 0$ em todas as singularidades da forma $(1, y_0, 0)$ de \mathcal{F} , pois caso contrário, a_n e b_n não seriam coprimos, contradizendo a hipótese 3.1, item 5. Como R_1 não possui raízes racionais, segue que \overline{C} é não-singular em todos os seus pontos no infinito pela proposição 3.4. Além disso, no sistema de coordenadas yz em que a derivação 4.1 é descrita, o vetor $(1, 0)$ é o vetor tangente à reta $z = 0$. Mas este vetor é um autovetor do jacobiano em uma singularidade $(1, y_0, 0)$ de Ω associado ao autovalor λ_1 . Logo, o autovetor associado a λ_2 será o vetor tangente a \overline{C} em $(1, y_0, 0)$. Então, pela fórmula 3.6, temos que

$$\text{CS}_{\mathcal{F}}(\overline{C}, (1, y_0, 0)) = \frac{P'(y_0)}{a_n(1, y_0)},$$

para todas as raízes y_0 de $P(y) = 0$. Aplicando o teorema 3.6 em conjunto com a hipótese 4.3, concluímos que

$$\sum_{\{y_0: P(y_0)=0\}} \text{CS}_{\mathcal{F}}(\overline{C}, (1, y_0, 0)) = \deg(\overline{C})^2.$$

Mas o lado esquerdo da igualdade corresponde à soma das raízes de R_1 , que é igual a q_n . Portanto, $q_n = \deg(\overline{C})^2 = (n + 1)^2$, pela proposição 3.4. \square

O corolário abaixo é uma consequência imediata da proposição.

Corolário 4.2. *Seja $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2$ uma solução algébrica de \mathcal{F} . Se R_1 não possui raízes racionais e $q_n \neq (n + 1)^2$, então*

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap \overline{C} \cap U_z \neq \emptyset.$$

4.2 As Singularidades Finitas

Nesta seção, lidamos com as singularidades de \mathcal{F} que pertencem ao conjunto aberto $z \neq 0$. As hipóteses sobre D (3.1) continuam válidas.

Pela hipótese 3.1, item 2,

$$R_2 = \text{Res}_y(a, b) \in \mathbb{Q}[x]$$

tem grau no máximo igual a n^2 . Assumindo que R_2 seja irredutível e tenha grau exatamente igual a n^2 em \mathbb{Q} , segue do “*Shape Lemma*” ([23, Teorema 3.7.25, p. 257]) que o ideal (a, b) também pode ser gerado por R_2 e um polinômio da forma $y - g(x)$, onde $g \in \mathbb{Q}[x]$, o

que implica que as singularidades de D são da forma $(x_0, g(x_0))$, onde x_0 é uma raiz de R_2 . Podemos, então, trabalhar com o grupo de Galois do polinômio R_2 , denotado por $\text{Gal}(R_2, \mathbb{Q})$.

O grupo de Galois de um polinômio f , em uma variável, com coeficientes racionais pode ser pensado como um grupo de aplicações de permutação sobre as raízes (complexas) de f . Desta forma, se f possui n raízes, $\text{Gal}(f, \mathbb{Q}) \hookrightarrow S_n$, onde S_n é o conjunto de todas as aplicações de permutação de n elementos ($|S_n| = n!$). Além disso, se $\sigma \in \text{Gal}(f, \mathbb{Q})$ e $k \in \mathbb{Q}$, então $\sigma(k) = k$, isto é, as aplicações de $\text{Gal}(f, \mathbb{Q})$ mantêm os elementos de \mathbb{Q} parados. Se o polinômio f for irredutível, então o grupo $\text{Gal}(f, \mathbb{Q})$ possui a propriedade adicional de agir transitivamente sobre as raízes de f , isto é, se α e β são raízes de f , então existe um elemento $\sigma \in \text{Gal}(f, \mathbb{Q})$ tal que $\sigma(\alpha) = \beta$.

Como estamos assumindo que R_2 é irredutível, então, se $\sigma \in \text{Gal}(R_2, \mathbb{Q})$ e x_0 é uma raiz de R_2 , temos que $(x_0, g(x_0))$ é uma singularidade de D e

$$\sigma((x_0, g(x_0))) = (\sigma(x_0), \sigma(g(x_0))) = (\sigma(x_0), g(\sigma(x_0))).$$

Mas $\sigma(x_0)$ também é uma raiz de R_2 . Logo, se p é uma singularidade de D e $\sigma \in \text{Gal}(R_2, \mathbb{Q})$, então $\sigma(p)$ também é uma singularidade de D . Isto significa que o grupo de Galois $\text{Gal}(R_2, \mathbb{Q})$ age transitivamente sobre as singularidades de D , fato que será útil mais adiante neste capítulo.

O próximo resultado é uma consequência do teorema de Baum-Bott.

Proposição 4.3. *Assuma que:*

1. R_1 não possui raízes racionais;
2. R_2 é irredutível e tem grau igual a n^2 em \mathbb{Q} .

Seja

$$s = \frac{1}{n^2} \left(-\frac{q_1}{q_0} - q_n + n^2 + 2n + 2 \right).$$

Então, \mathcal{F} possui expoentes característicos racionais se e somente se $s(s-4)$ é um quadrado perfeito em \mathbb{Q} .

Demonstração. Assuma o contrário. Como R_1 não possui raízes racionais, qualquer expoente característico racional de \mathcal{F} estará associado a uma singularidade de D . Pela hipótese 3.1, item 3, e pelo item 2 das hipóteses desta proposição, temos que \mathcal{F} possui $n^2 + n + 1$ singularidades distintas. Segue então da proposição 3.7 que elas são todas não-degeneradas.

Além disso, q_n é a soma de todos os índices de Camacho-Sad de \mathcal{F} sobre os pontos de $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty$ que correspondem a direções transversais a L_∞ (de acordo com a prova da proposição 4.1), enquanto q_1/q_0 é a soma dos recíprocos destes índices. Então, pelo exemplo 3.3 (p. 158) e pelo Teorema 5.17 (p. 167) de [20], segue que $(q_1/q_0) + q_n + 2(n+1)$ é a soma dos índices de Baum-Bott de \mathcal{F} sobre todas as suas singularidades que pertencem a L_∞ . Se D possui um expoente característico racional em alguma singularidade p_0 , então

$$\frac{\text{tr}(J(p_0))^2}{\det(J(p_0))} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2 = s \in \mathbb{Q}.$$

Desta forma, se $\sigma \in \text{Gal}(R_2, \mathbb{Q})$, então $\sigma(s) = s$. Logo,

$$\sigma \left(\frac{\text{tr}(J(p_0))^2}{\det(J(p_0))} \right) = \frac{\text{tr}(J(\sigma(p_0)))^2}{\det(J(\sigma(p_0)))} = s.$$

Mas $\sigma(p_0)$ também é uma singularidade de D . Portanto, devido à transitividade da ação de $\text{Gal}(R_2, \mathbb{Q})$ sobre o conjunto de singularidades de D temos que

$$\frac{\text{tr}(J(p))^2}{\det(J(p))} = s \in \mathbb{Q},$$

para todo $p \in \text{Sing}(D)$. Como D possui n^2 singularidades em $z \neq 0$, segue do teorema 3.5 que

$$\frac{q_1}{q_0} + q_n + 2(n+1) + n^2 s = (n+2)^2.$$

Portanto,

$$s = \frac{1}{n^2} \left(-\frac{q_1}{q_0} - q_n + n^2 + 2n + 2 \right).$$

Mas

$$\frac{\text{tr}(J(p))^2}{\det(J(p))} = t + \frac{1}{t} + 2,$$

onde t é um expoente característico de D em $p \in \text{Sing}(D)$. Logo, $t+t^{-1}+2 = s$. Entretanto, computando o discriminante, descobrimos que a equação quadrática resultante possui uma raiz racional se e somente se $s(s-4)$ possui uma raiz quadrada racional. \square

A próxima proposição relaciona as singularidades de D a suas soluções algébricas com coeficientes racionais.

Proposição 4.4. *Seja $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ uma solução algébrica de D e seja $C = \mathcal{Z}(f)$. Se*

1. R_1 não possui raízes racionais;
2. $q_n \neq (n+1)^2$;

3. R_2 é irredutível de grau n^2 sobre \mathbb{Q} ;

então C é uma curva singular de \mathbb{C}^2 e

$$\text{Sing}(D) = \text{Sing}(C).$$

Demonstração. Suponha, em primeiro lugar, que C seja uma curva não-singular. Pela hipótese (1) e pela proposição 3.4, a curva \overline{C} é não-singular em todos os pontos de $\overline{C} \cap L_\infty$ e possui grau $n + 1$.

Por outro lado, por (1) e (2) e pelo corolário 4.2, existe uma singularidade p de D tal que $f(p) = 0$. Como f tem coeficientes racionais, segue que $0 = \sigma(0) = \sigma(f(p)) = f(\sigma(p))$ para todo $\sigma \in \text{Gal}(R_2, \mathbb{Q})$. No entanto, como vimos anteriormente nesta seção, $\text{Gal}(R_2, \mathbb{Q})$ age transitivamente em $\text{Sing}(D)$. Portanto, toda singularidade de D é um zero de f . Logo,

$$\text{Sing}(D) \subset C. \tag{4.4}$$

Portanto, \overline{C} é uma curva não-singular de \mathbb{P}^2 que contém $\text{Sing}(\mathcal{F})$.

A partir disto, por [16, Proposição 4.1, p. 126], existe um polinômio homogêneo h e uma 1-forma homogênea η tal que

$$\Omega = hdF + F\eta, \tag{4.5}$$

onde F denota a homogeneização de f e com respeito a z . Levando em conta que tanto F quanto os coeficientes de Ω possuem grau $n + 1$, concluímos que

$$n + 2 = \deg(h) + \deg(F) = \deg(h) + (n + 1),$$

logo $\deg(h) = 1$.

No entanto,

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{Z}(F) = \overline{C},$$

Então, pela equação 4.5, hdF se anula em toda singularidade p de Ω . Mas \overline{C} é uma curva não singular, então $dF(p) \neq 0$ em todo $p \in \overline{C}$. Concluímos, então, que $h(p) = 0$ para todo $p \in \text{Sing}(\Omega)$. Entretanto, todas as singularidades de \mathcal{F} são também zeros de za^h . Como za^h possui grau $n + 1$, segue do Teorema de Bézout que

$$n^2 + n + 1 \leq \deg(za^h)\deg(h) = \deg(za^h) = n + 1,$$

o que é uma contradição. Portanto, C precisa ser singular em algum ponto p de $\text{Sing}(\mathcal{F})$. Mas pela hipótese (1), em conjunto com a proposição 3.4, $p \in \text{Sing}(D)$. Em outras palavras,

$$(\nabla f)(p) = 0 \text{ para algum } p \in \text{Sing}(D).$$

Mas então $0 = \sigma(0) = \sigma((\nabla f)(p)) = (\nabla f)(\sigma(p))$. Como $\text{Gal}(R_2, \mathbb{Q})$ age transitivamente no conjunto $\text{Sing}(D)$, segue que C precisa ser singular em todas as singularidades de D , o que prova a proposição. \square

Estamos agora prontos para provar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.5. *Seja*

$$s = \frac{1}{n^2} \left(-\frac{q_1}{q_0} - q_n + n^2 + 2n + 2 \right).$$

Se

1. R_1 não possui raízes racionais;
2. $q_n \neq (n+1)^2$;
3. R_2 é irredutível e tem grau igual a n^2 em \mathbb{Q} ;
4. $s(s-4)$ não é um quadrado perfeito em \mathbb{Q} ;

então, D não possui soluções algébricas.

Demonstração. Assuma o contrário. Seja $C = \mathcal{Z}(f)$ uma solução algébrica de D , para algum $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ reduzido e \overline{C} a projetivização de C . Por (1), (2) e (3) e pela proposição 4.4, C precisa ser uma curva singular de \mathbb{C}^2 e

$$\text{Sing}(D) = \text{Sing}(C).$$

Além disso, pela proposição 4.3 e por (1), (3) e (4), \mathcal{F} não possui expoentes característicos racionais. Então, por [19, Teorema 2.3, p. 58], todas as singularidades de \overline{C} são nós. Como \overline{C} é reduzida, segue de [15, Problema 5-25, p. 118] e da proposição 3.4 que

$$n^2 = \sum_{p \in \text{Sing}(D)} \frac{m_p(m_p - 1)}{2} \leq \frac{n(n+1)}{2},$$

onde m_p é a multiplicidade de \overline{C} em p . Mas esta desigualdade implica que $n \leq 1$, o que é uma contradição com a hipótese 3.1, item 2. \square

4.3 O Algoritmo

A partir do último teorema da seção anterior, estamos prontos para desenvolver um algoritmo que retorna que uma dada derivação não possui soluções algébricas ou então retorna insucesso. Tudo que o algoritmo faz é meramente checar se todas as hipóteses necessárias para a aplicação do teorema 4.5 são satisfeitas para uma dada derivação do plano complexo afim.

Algoritmo 4.6. *Dada uma derivação $D_{a,b}$ onde $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$, o algoritmo retorna uma dentre as seguintes mensagens: o algoritmo falhou ou não há soluções algébricas.*

Passo 1: *Se $\deg(a) = \deg(b)$, seja $n = \deg(a)$. Caso contrário, páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 2: *Se $n = 1$, páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 3: *Se o polinômio $ya_n - xb_n$ é nulo ou redutível, páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 4: *Defina*

$$P(y) = ya_n(1, y) - b_n(1, y) \quad \text{e} \quad Q(y, t) = P'(y) - ta_n(1, y)$$

e calcule $R_1(t) = \text{Res}_y(P, Q)$.

Passo 5: *Se R_1 possui raízes racionais páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 6: *Denote por $(-1)^k q_k$ o quociente entre o coeficiente de grau k e o coeficiente líder de R_1 . Se $q_n = (n + 1)^2$, páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 7: *Calcule $R_2 = \text{Res}_y(a, b)$.*

Passo 8: *Se $\deg(R_2) < n^2$ ou R_2 é redutível sobre \mathbb{Q} , páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 9: *Calcule*

$$s = \frac{1}{n^2} \left(-\frac{q_1}{q_0} - q_n + n^2 + 2n + 2 \right).$$

Passo 10: *Se $\sqrt{s(s-4)}$ é um número racional, páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 11: *Páre e retorne não há soluções algébricas.*

Capítulo 5

O Segundo Algoritmo

“Por favor, senhor alienígena, não me coma! Eu tenho mulher e filhos! Coma-os!” - Homer Simpson

Neste capítulo, iremos apresentar o segundo algoritmo que testa se um campo vetorial do plano afim não possui nenhuma solução algébrica. O interesse neste algoritmo reside no fato de que ele se baseia em hipóteses mais fracas do que as utilizadas pelo primeiro algoritmo.

5.1 Uma Nova Análise das Singularidades Finitas

A análise das singularidades em $z \neq 0$ que levaram ao primeiro algoritmo requer que a derivação não tenha nenhum expoente característico racional. Neste capítulo, será descrito um segundo algoritmo que tem sucesso em provar que D não possui soluções algébricas sob hipóteses mais fracas. Na verdade, este algoritmo vai mais além. Se certas hipóteses sobre D são satisfeitas, mas a derivação possui uma solução algébrica, ela será encontrada pelo algoritmo. O resultado chave é o seguinte teorema.

Teorema 5.1. *Suponha que:*

1. R_1 não possui raízes racionais;
2. $q_n \neq (n+1)^2$;
3. R_2 é irredutível de grau n^2 .

Se $f \in \mathbb{Q}[x, y] \setminus \mathbb{Q}$ é uma solução algébrica de D , então f divide $bD(a) - aD(b)$.

Demonstração. Como R_2 é irredutível de grau n^2 , segue que $\mathcal{Z}(a)$ intersecta $\mathcal{Z}(b)$ em n^2 pontos distintos. Além disso, por (1), (2) e (3) e a proposição 4.4, todos estes pontos

pertencem a $\mathcal{Z}(f)$. Como isto é verdade para qualquer solução algébrica de D com coeficientes racionais, podemos assumir, sem perda de generalidade, que f é irredutível sobre \mathbb{Q} . Portanto, pelo teorema de Noether (Teorema 3.10),

$$f^h = g_1 a^h + g_2 b^h.$$

Entretanto, $\deg(f) = n+1$ pela proposição 3.4, o que implica que $\deg(g_i) = 1$ para $i = 1, 2$. Seja

$$g_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \quad \text{e} \quad g_2 = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z.$$

Pelas hipóteses 3.1, item 2, e (1) em conjunto com o lema 3.3, a proposição 3.4 e o Teorema de Bézout, temos que

$$\#(\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty) = \#(\overline{C} \cap L_\infty) = n + 1 \geq 3.$$

Denotando por $p_j = (1, y_j, 0)$, para $1 \leq j \leq n + 1$, as singularidades de \mathcal{F} no infinito, obtemos, com o auxílio do lema 3.3, que

$$0 = f(p_j) = (\alpha_1 + \alpha_2 y_j) a^h(1, y_j, 0) + (\beta_1 + \beta_2 y_j) b^h(1, y_j, 0),$$

de forma que

$$(\alpha_1 + \alpha_2 y_j) a_n(1, y_j) + (\beta_1 + \beta_2 y_j) b_n(1, y_j) = 0. \quad (5.1)$$

Como p_j é uma singularidade de \mathcal{F} no infinito, segue que

$$b_n(1, y_j) - y_j a_n(1, y_j) = 0. \quad (5.2)$$

Portanto, a equação 5.1 pode ser escrita como

$$a_n(1, y_j)(\alpha_1 + (\alpha_2 + \beta_1)y_j + \beta_2 y_j^2) = 0.$$

Se $a_n(1, y_j) = 0$, então, pela equação 5.2, temos que $b_n(1, y_j) = 0$. Mas isto significa que a_n e b_n possuem um zero comum, o que contradiz a hipótese 3.1, item 5. Portanto, $a_n(1, y_j) \neq 0$. Logo,

$$\alpha_1 + (\alpha_2 + \beta_1)y_j + \beta_2 y_j^2 = 0$$

para $1 \leq j \leq n + 1$. Este é um sistema de equações lineares nas variáveis $\alpha_1, (\alpha_2 + \beta_1)$ e

β_2 . Como $n + 1 \geq 3$, a matriz deste sistema contém o menor

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é

$$(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)(y_1 - y_2) \neq 0.$$

Portanto,

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \beta_1 = \beta_2 = 0$$

e

$$f^h = (\alpha_2 y + \alpha_3 z)a^h + (-\alpha_2 x + \beta_3 z)b^h. \quad (5.3)$$

Entretanto, f^h não pode ser divisível por z , o que implica que $\alpha_2 \neq 0$. Dividindo f^h por α_2 , podemos assumir que $\alpha_2 = 1$. Desomogeneizando a equação 5.3 com respeito a z , temos que

$$f = (y + \alpha_3)a + (-x + \beta_3)b \quad (5.4)$$

é uma solução de D . Como f , a e b possuem coeficientes racionais e $\text{mdc}(a, b) = 1$ pela hipótese 3.1, item 5, segue que $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{Q}$. Um cálculo simples mostra que

$$D(f) = (y + \alpha_3)D(a) + (-x + \beta_3)D(b),$$

que por sua vez precisa ser divisível por f . Multiplicando esta última equação por a e substituindo $(y + \alpha_3)a$ pelo seu valor na equação 5.4, obtemos

$$aD(f) = (f + (x - \beta_3)b)D(a) - a(x - \beta_3)D(b) = fD(a) + (x - \beta_3)(bD(a) - aD(b)).$$

Como $D(f)$ é múltiplo de f por hipótese, podemos concluir que f divide

$$(x - \beta_3)(bD(a) - aD(b)).$$

No entanto, f é irredutível sobre \mathbb{Q} de grau $n + 1 > 1$. Em particular, f não pode dividir $x - \beta_3$. Logo, f precisa dividir $bD(a) - aD(b)$, como queríamos demonstrar. \square

5.2 O Algoritmo

O algoritmo que resulta do teorema 5.1 verifica se todas as hipóteses necessárias são satisfeitas e se algum fator de $bD(a) - aD(b)$ sobre \mathbb{Q} é invariante sob D . Se obtém sucesso nesta última etapa, encontramos uma solução algébrica de D . Caso contrário, provamos que D não possui soluções algébricas.

Algoritmo 5.2. *Dada uma derivação $D_{a,b}$ onde $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$, o algoritmo retorna uma solução algébrica de D com coeficientes racionais, ou uma dentre as seguintes mensagens: o algoritmo falhou ou não há soluções algébricas.*

Passo 1: *Se $\deg(a) = \deg(b)$, seja $n = \deg(a)$. Caso contrário, páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 2: *Se $n = 1$, páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 3: *Se o polinômio $ya_n - xb_n$ é nulo ou redutível, páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 4: *Defina*

$$P(y) = ya_n(1, y) - b_n(1, y) \quad \text{e} \quad Q(y, t) = P'(y) - ta_n(1, y)$$

e calcule $R_1(t) = \text{Res}_y(P, Q)$.

Passo 5: *Se R_1 possui raízes racionais páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 6: *Denote por $(-1)^k q_k$ o quociente entre o coeficiente de grau k e o coeficiente líder de R_1 . Se $q_n = (n + 1)^2$, páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 7: *Calcule $R_2 = \text{Res}_y(a, b)$.*

Passo 8: *Se $\deg(R_2) < n^2$ ou R_2 é redutível sobre \mathbb{Q} , páre e retorne o algoritmo falhou.*

Passo 9: *Fatore $bD(a) - aD(b)$ sobre \mathbb{Q} .*

Passo 10: *Para cada fator g de $bD(a) - aD(b)$ de grau $n + 1$:*

- *Calcule o resto r da divisão de $D(g)$ por g .*
- *Se $r = 0$, páre e retorne g .*

Passo 11: *Páre e retorne não há soluções algébricas.*

Usando o próximo algoritmo, podemos evitar a fatoração nos passos 9 e 10. Primeiro, precisamos de um lema.

Lema 5.3. *Se uma solução algébrica f de D é fator de um polinômio $h \in \mathbb{C}[x, y]$, então f é fator de $\text{mdc}(h, D(h))$.*

Demonstração. Se f é fator de h , então $h = fq$, para algum $q \in \mathbb{C}[x, y]$. Como f é uma solução algébrica de D , segue que f divide $D(f)$. Desta forma, f também divide $D(h)$, uma vez que $D(h) = D(f)q + fD(q)$. Logo, f divide $\text{mdc}(h, D(h))$. \square

O próximo algoritmo usa o lema recursivamente para encontrar uma solução algébrica.

Algoritmo 5.4. *Dada uma derivação $D_{a,b}$ onde $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$ são polinômios de grau $n \geq 2$ e um polinômio $h \in \mathbb{Q}[x, y]$, o algoritmo retorna o maior fator de h que é uma solução algébrica de D .*

Passo 1: *Seja $d = \text{mdc}(h, D(h))$.*

Passo 2: *Se $\deg(d) = \deg(h)$, páre e retorne d .*

Passo 3: *Faça $h = d$ e retorne ao passo 1.*

Demonstração. Pelo lema 5.3, se h possui uma solução algébrica de D como um de seus fatores, então esta solução divide d . Como $\deg(d) \leq \deg(h)$, precisamos apenas provar que se a igualdade é obtida, então d é uma solução algébrica de D . Entretanto, se $\deg(d) = \deg(h)$, então h e d são iguais a menos de um fator constante não nulo. Em particular, h divide $D(h)$, então h é uma solução algébrica de D . A maximalidade da solução encontrada pelo algoritmo é uma consequência do lema 5.3. \square

Podemos então construir a seguinte variante do algoritmo 5.2.

Algoritmo 5.5. *Dada uma derivação $D_{a,b}$ onde $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$, o algoritmo retorna uma solução algébrica de D com coeficientes racionais ou uma dentre as seguintes mensagens: o algoritmo falhou ou não há soluções algébricas.*

Passo 1 ao Passo 8: *Mesmas ações do algoritmo 5.2.*

Passo 9: *Calcule $bD(a) - aD(b)$ e dê este polinômio como entrada para o algoritmo 5.4.*

Passo 10: *Seja d a saída retornada pelo algoritmo 5.4. Se $d \neq 1$, então páre e retorne d .*

Passo 11: *Páre e retorne não há soluções algébricas.*

Capítulo 6

Testes e Resultados

“Oh, podem te mostrar estatísticas para provar qualquer coisa, Kent. Quarenta por cento das pessoas sabem disso.” - Homer Simpson

Os algoritmos descritos nos capítulos 4 e 5 foram implementados usando o sistema de computação algébrica SINGULAR (versão 2.0.5) [13]. Todos os testes discutidos neste capítulo foram executados em um micro-computador dotado de um processador Pentium 4 HT de 2.8 GHz, com 512 MB de memória primária e sistema operacional Windows 2000.

O primeiro teste que foi executado calculou o tempo médio levado pelos algoritmos para mostrar que uma derivação genérica de um dado grau, definida por um par de polinômios densos gerados aleatoriamente, não possui soluções algébricas. A tabela 6.1 mostra o resultado de um programa que gera aleatoriamente 100 pares de polinômios densos para cada grau e calcula o tempo médio de CPU utilizado para verificar que a derivação definida por cada um destes pares não possui soluções algébricas. Nesta tabela, e em todas as outras, usamos a seguinte terminologia:

Algoritmo 1 para o algoritmo 4.6;

Algoritmo 2 para o algoritmo 5.2 e

Algoritmo 3 para o algoritmo 5.5.

No primeiro teste, nenhuma das derivações testadas fez com que algum dos algoritmos falhasse. Isto não foi inesperado, uma vez que estas derivações foram definidas por polinômios densos, com coeficientes aleatórios, o que as torna ‘genéricas’ em um sentido experimental.

Para graus mais altos, o tempo gasto para testar 100 derivações de cada grau com cada um dos três algoritmos é muito longo. Então, com o objetivo de termos alguns resultados

Grau	Algoritmo 1	Algoritmo 2	Algoritmo 3
2	5 ms	7 ms	5 ms
3	8 ms	14 ms	4 ms
4	10 ms	21 ms	13 ms
5	22 ms	34 ms	26 ms
6	39 ms	63 ms	50 ms
7	83 ms	113 ms	100 ms
8	148 ms	193 ms	174 ms
9	312 ms	376 ms	355 ms
10	541 ms	625 ms	604 ms
11	932 ms	1,046 s	1,021 s
12	1,736 s	1,891 s	1,857 s
13	2,850 s	3,045 s	3,012 s
14	4,658 s	4,903 s	4,881 s
15	7,449 s	7,750 s	7,735 s
16	11,721 s	12,078 s	12,079 s
17	18,530 s	19,131 s	19,091 s
18	27,716 s	28,098 s	28,189 s
19	41,681 s	42,377 s	42,453 s
20	59,759 s	60,881 s	60,729 s

Tabela 6.1: Tempo médio de execução dos algoritmos para derivações definidas por polinômios densos (100 derivações para cada grau)

para derivações de grau maior do que 20, executamos um segundo teste, similar ao primeiro, exceto que apenas uma derivação é testada em cada grau. O tempo de CPU utilizado pelos algoritmos para verificar que as derivações não possuem soluções algébricas é mostrado na tabela 6.2. Da mesma forma que no primeiro teste, nenhuma derivação fez com que algum dos algoritmos falhasse.

Grau	Algoritmo 1	Algoritmo 2	Algoritmo 3
21	85,187 s	85,297 s	85,501 s
22	122,047 s	122,907 s	123,187 s
23	176,922 s	178,374 s	178,094 s
24	239,485 s	240,985 s	240,890 s
25	313,937 s	323,875 s	325,672 s

Tabela 6.2: Tempo de execução dos algoritmos para derivações definidas por polinômios densos (1 derivação para cada grau)

No terceiro teste, geramos derivações definidas por polinômios esparsos. Neste caso, os algoritmos falham freqüentemente. De maneira interessante, neste teste, ou todos os três algoritmos falharam simultaneamente para uma derivação ou todos eles obtiveram sucesso. Teoricamente, isto não é necessário, uma vez que o segundo algoritmo (e, conseqüentemente, o terceiro) se baseia em hipóteses mais fracas do que o primeiro.

Como se poderia esperar, o número de derivações para as quais os algoritmos falham

é proporcional ao número de coeficientes nulos dos polinômios correspondentes, como é mostrado na tabela 6.3. Os dados foram obtidos com um procedimento que testa 100 derivações de grau 4 aleatoriamente geradas em cada caso.

Para a realização dos testes, utilizamos a função `sparsepoly` do SINGULAR. A função `sparsepoly` possui o formato

$$P = \text{sparsepoly}(u[,o,p,b]);,$$

onde P é um polinômio e u , o , p e b são inteiros. Os três últimos parâmetros da função (que se encontram entre colchetes) são opcionais. O polinômio P retornado pela função possui apenas termos de grau d , onde $u \leq d \leq o$, sendo que o parâmetro p ($0 \leq p \leq 100$) controla a percentagem dos coeficientes do polinômio (escolhidos aleatoriamente dentre todos os coeficientes) que serão nulos. Todos os outros coeficientes irão receber valores aleatórios k , onde $1 \leq k < b$. Caso os parâmetros o , p e b não sejam fornecidos na chamada da função, ela irá trabalhar com os valores padrão $o = u$, $p = 75$ e $d = 30000$. Para mais detalhes sobre esta função, [13] pode ser consultado.

Em todos os testes realizados, sempre utilizamos o valor padrão para o parâmetro b . No teste com polinômios esparsos simplesmente variamos o valor do parâmetro p que era passado no momento da chamada da função `sparsepoly`. Já nos testes com polinômios densos, fixamos $p = 0$. Como esta função escolhe aleatoriamente tanto os coeficientes que serão nulos quanto os valores dos coeficientes não nulos, em termos experimentais é factível esperar que esses polinômios serão genéricos o suficiente para que os algoritmos obtenham sucesso na maior parte das vezes, exceto quando a quantidade de coeficientes nulos aumenta.

Porcentagem de coeficientes iguais a zero	Porcentagem de Falhas
0%	0%
20%	35%
30%	63%
50%	79%
70%	99%
80%	100%
90%	100%

Tabela 6.3: Percentual de derivações de grau 4 que originam falhas nos algoritmos para diferentes percentuais de coeficientes nulos nos polinômios que as definem (100 derivações para cada percentual)

Para a contagem do tempo de CPU utilizado pelos algoritmos, utilizamos a função `system` e a variável `timer` do SINGULAR. A função `system` é utilizada para configurar várias

opções de sistema do SINGULAR. Para os objetivos desta dissertação, ela foi usada apenas para configurar a unidade de tempo em que o SINGULAR iria fazer a cronometragem do tempo transcorrido. O padrão do SINGULAR é fazer a contagem em segundos. Utilizamos então a função `system` para instruí-lo a realizar a contagem em milésimos de segundo. A variável `timer` é uma variável padrão do SINGULAR que guarda a quantidade de tempo transcorrida desde a sua inicialização ou desde a última vez que a atribuição

```
timer = 0;
```

foi feita. Desta forma, zerávamos a variável `timer` antes da execução dos algoritmos e verificávamos o seu valor ao término da execução. Este valor corresponde ao tempo de CPU utilizado.

Como estes testes mostram, todos os três algoritmos são razoavelmente eficientes. Embora o segundo e o terceiro algoritmos testem hipóteses mais gerais do que o primeiro, todos os três são executados em tempo semelhante. Além disso, para derivações genéricas, os algoritmos apresentam uma excelente taxa de sucesso.

Capítulo 7

Conclusões

“Eu não acredito! Saber ler e escrever realmente é útil!” - Homer Simpson

Conforme o exposto na introdução desta dissertação, apesar dos campos vetoriais polinomiais que aparecem nas aplicações geralmente possuem curvas algébricas invariantes, isto não é de maneira nenhuma a regra geral. Um campo vetorial genérico, de grau maior ou igual a 2, não possui nenhuma curva algébrica invariante. Na prática, porém, em geral é bastante difícil determinar, através de algum tipo de teste, se um campo vetorial dado explicitamente possui ou não curvas algébricas invariantes. Isto não é satisfatório, porque campos sem curvas algébricas invariantes podem ser utilizados em várias aplicações.

Este trabalho teve como objetivo desenvolver dois algoritmos com o poder de testar se uma dada derivação

$$D = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y},$$

em que $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$, não possui curvas algébricas invariantes. Os algoritmos projetados testam uma série de hipóteses. Se todas forem satisfeitas, podemos aplicar um teorema que nos garante que a derivação não pode possuir nenhuma curva algébrica invariante. A satisfação das hipóteses testadas pelo primeiro algoritmo (segundo nomenclatura do capítulo 6) permite a aplicação do teorema 4.5 e a satisfação das hipóteses testadas no segundo e terceiro algoritmos permite a aplicação do teorema 5.1. Caso uma das hipóteses não seja satisfeita, então o algoritmo retorna um resultado inconclusivo: a derivação pode, ou não, possuir curvas algébricas invariantes. Desta forma, ou o algoritmo obtém sucesso em provar que uma dada derivação não possui nenhuma curva algébrica invariante ou ele retorna *“O Algoritmo Falhou”*.

A partir destes algoritmos, esperávamos conseguir obter exemplos de derivações genéricas sem curvas algébricas invariantes. A maior dúvida se situava na performance com-

putacional de ambos. Os algoritmos cumpririam o seu papel ou, na prática, retornariam resultado inconclusivo na maior parte das vezes? Os algoritmos seriam executados computacionalmente em intervalos de tempo razoáveis ou nunca retornariam uma resposta? A performance computacional, no entanto, terminou por se mostrar muito satisfatória. Os algoritmos obtiveram sucesso para quase todas as derivações definidas por polinômios que estão próximos de serem cheios e os tempos de execução podem ser considerados excelentes, se tomarmos como referencial a ordem de grandeza dos tempos de execução considerados aceitáveis para algoritmos de Computação Algébrica.

Como os testes experimentais mostram, os algoritmos irão provar que qualquer derivação suficientemente genérica gerada por polinômios em $\mathbb{Q}[x, y]$ não possui nenhuma solução algébrica. Além disso, os algoritmos são bastante eficientes para derivações de grau até 20, retornando uma resposta em poucos segundos. Do ponto de vista teórico, o segundo e o terceiro algoritmos testam hipóteses mais fracas do que o primeiro. Devido a isto, o fato do tempo de execução destes dois algoritmos se manter sempre apenas discretamente superior ao tempo de execução do primeiro é um resultado excelente.

Infelizmente, nos testes experimentais realizados, não obtivemos nenhum exemplo de derivação que gera uma resposta inconclusiva no primeiro algoritmo e obtém sucesso no segundo e terceiro algoritmos. Isto não precisaria ocorrer necessariamente, já que as hipóteses testadas pelo segundo e terceiro algoritmos são mais fracas que as testadas no primeiro. Deve ser possível, portanto, elaborar um método para gerar artificialmente exemplos de derivações que falham no primeiro algoritmo mas obtém sucesso no segundo e terceiro. Isto foi feito para os dois algoritmos expostos em [10] e [11], mas no caso dos algoritmos desta dissertação, isto não se mostrou tão simples.

De maneira geral, o objetivo a que esta dissertação se propôs foi alcançado. Foram desenvolvidos algoritmos simples, mas ao mesmo tempo fortes o suficiente para retornar resultados conclusivos na grande maioria dos casos testados. Os algoritmos começam a falhar apenas no momento em que o número de coeficientes nulos dos polinômios que definem a derivação aumenta muito, o que não é uma deficiência dos algoritmos. Nestes casos, os campos passam a apresentar estruturas que não podem ser classificadas como genéricas, como singularidades com multiplicidade muito alta, por exemplo.

Desta forma, acreditamos que demos uma contribuição válida para o estudo de campos vetoriais do plano afim, assim como para o estudo de métodos computacionais para a resolução de problemas algébricos não-triviais. Os resultados obtidos estão sendo redigidos em um artigo que, esperamos, possa ser publicado em um periódico a médio prazo.

Apêndice A

Implementação no Singular dos Algoritmos Descritos

```
//Algorithm 1
proc AffineSol1(poly a, poly b, list #)
{
  //Before doing anything
  def r = basering;
  ring r1 = 0,(x,y),dp;
  poly a = imap(r,a);
  poly b = imap(r,b);

  if (size(#) == 0)
  {
    #[1] = "ASCII:a ";
  }

  //Step 1:
  int k = deg(a);
  int m = deg(b);
  if (k != m)
  {
    write(#[1], "Failed - (Step 1)");
    setring r;
    return(0);
  }
}
```

```

}
else
{
    int n = k;
}

//Step 2:
if (n == 1)
{
    write#[1], "Failed - (Step 2)";
    setring r;
    return(0);
}

//Step 3:
ring rh = 0, (x,y,z), dp;

poly a = imap(r1,a);
poly b = imap(r1,b);

poly ah = homog(a,z);
poly bh = homog(b,z);

poly as = subst(ah,z,0);
poly bs = subst(bh,z,0);

poly h = clear denom(y*as - x*bs);
ideal I = factorize(h,1);
if ((h == 0) || (clear denom(I[1]) != h))
{
    write#[1], "Failed - (Step 3)";
    setring r;
    return(0);
}

```

```

setring r1;

//Step 4:
poly h = imap(rh,h);
poly P = subst(h,x,1);
poly as = imap(rh,as);
poly an = subst(as,x,1);

ring ry = 0,(y,t),dp;
poly P = imap(r1,P);
poly an = imap(r1,an);
poly Q = diff(P,y) - t*an;
poly R1 = cleardenom(resultant(P,Q,y));

//Step 5:
ideal I = factorize(R1,1);
for (int i = 1; i <= size(I); i = i + 1)
{
    if (deg(I[i]) == 1)
    {
        write(#[1], "Failed - (Step 5)");
        setring r;
        return(0);
    }
}

//Step 6:
number cn = leadcoef(R1);
poly R1n = R1 - lead(R1);
number cn1 = leadcoef(R1n);
number qn1 = absValue(cn1/cn);

if (qn1 == (n+1)*(n+1))

```



```

{
    write#[1], "Failed - (Step 6)";
    setring r;
    return(0);
}

//Step 7:
setring r1;
poly R2 = clearDenom(resultant(a,b,y));

//Step 8:
ideal I = factorize(R2,1);
if ((deg(R2) < n*n) || (clearDenom(I[1]) != R2))
{
    write#[1], "Failed - (Step 8)";
    setring r;
    return(0);
}

//Step 9:
ring rs = 0,(t),ds;
poly R1 = imap(ry,R1);
number c0 = leadcoef(R1);
poly R1n = R1 - lead(R1);
number c1 = leadcoef(R1n);
number cn = imap(ry,cn);
number q0 = absValue(c0/cn);
number q1 = absValue(c1/cn);
number qn1 = imap(ry,qn1);

number s = (-(q1/q0) - qn1 + n*n + 2*n + 2) / (n*n);

setring r1;
number s = imap(rs,s);

```

```

//Step 10:
poly S = y2 - s*(s-4);
I = factorize(S,1);
for (i = 1; i <= size(I); i = i + 1)
{
  if (deg(I[i]) == 1)
  {
    write(#[1], "Failed - (Step 10)");
    setring r;
    return(0);
  }
}

//Step 11:
write(#[1], "There are no algebraic solutions");
setring r;
return(-1);
}

//Algorithm 2
proc AffineSol2(poly a, poly b, list #)
{
  //Before doing anything
  def r = basering;
  ring r1 = 0,(x,y),dp;
  poly a = imap(r,a);
  poly b = imap(r,b);

  if (size(#) == 0)
  {
    #[1] = "ASCII:a ";
  }
}

```

```

//Step 1:
int k = deg(a);
int m = deg(b);
if (k != m)
{
    write(#[1], "Failed - (Step 1)");
    setring r;
    return(0);
}
else
{
    int n = k;
}

//Step 2:
if (n == 1)
{
    write(#[1], "Failed - (Step 2)");
    setring r;
    return(0);
}

//Step 3:
ring rh = 0, (x,y,z), dp;

poly a = imap(r1,a);
poly b = imap(r1,b);

poly ah = homog(a,z);
poly bh = homog(b,z);

poly as = subst(ah,z,0);
poly bs = subst(bh,z,0);

```

```

poly h = cleardenom(y*as - x*bs);
ideal I = factorize(h,1);
if ((h == 0) || (cleardenom(I[1]) != h))
{
    write#[1], "Failed - (Step 3)";
    setring r;
    return(0);
}

setring r1;

//Step 4:
poly h = imap(rh,h);
poly P = subst(h,x,1);
poly as = imap(rh,as);
poly an = subst(as,x,1);

ring ry = 0,(y,t),dp;
poly P = imap(r1,P);
poly an = imap(r1,an);
poly Q = diff(P,y) - t*an;
poly R1 = cleardenom(resultant(P,Q,y));

//Step 5:
ideal I = factorize(R1,1);
for (int i = 1; i <= size(I); i = i + 1)
{
    if (deg(I[i]) == 1)
    {
        write#[1], "Failed - (Step 5)";
        setring r;
        return(0);
    }
}
}

```

```

//Step 6:
number cn = leadcoef(R1);
poly R1n = R1 - lead(R1);
number cn1 = leadcoef(R1n);
number qn1 = absValue(cn1/cn);

if (qn1 == (n+1)*(n+1))
{
    write#[1], "Failed - (Step 6)";
    setring r;
    return(0);
}

//Step 7:
setring r1;
poly R2 = cleardenom(resultant(a,b,y));

//Step 8:
ideal I = factorize(R2,1);
if ((deg(R2) < n*n) || (cleardenom(I[1]) != R2))
{
    write#[1], "Failed - (Step 8)";
    setring r;
    return(0);
}

//Step 9:
poly Da = a * diff(a,x) + b * diff(a,y);
poly Db = a * diff(b,x) + b * diff(b,y);
poly W = b * Da - a * Db;
I = factorize(W,1);

//Step 10:

```

```

for (i = 1; i <= size(I); i = i+1)
{
  poly g = I[i];
  if (deg(g) == (n+1))
  {
    poly Dg = a * diff(g,x) + b * diff(g,y);
    poly res = reduce(Dg,std(g));
    if (res == 0)
    {
      write(#[1], "Failed - (Step 10)");
      write(#[1], "Solução: ", g);
      setring r;
      return (1);
    }
  }
}

//Step 11:
write(#[1], "There are no algebraic solutions");
setring r;
return(-1);
}

//Algorithm 3
proc AffineSol2v(poly a, poly b, list #)
{
  //Before doing anything
  def r = basering;
  ring r1 = 0,(x,y),dp;
  poly a = imap(r,a);
  poly b = imap(r,b);

  if (size(#) == 0)
  {

```

```

    #[1] = "ASCII:a ";
}

//Step 1:
int k = deg(a);
int m = deg(b);
if (k != m)
{
    write(#[1], "Failed - (Step 1)");
    setring r;
    return(0);
}
else
{
    int n = k;
}

//Step 2:
if (n == 1)
{
    write(#[1], "Failed - (Step 2)");
    setring r;
    return(0);
}

//Step 3:
ring rh = 0, (x,y,z), dp;

poly a = imap(r1,a);
poly b = imap(r1,b);

poly ah = homog(a,z);
poly bh = homog(b,z);

```

```

poly as = subst(ah,z,0);
poly bs = subst(bh,z,0);

poly h = cleardenom(y*as - x*bs);
ideal I = factorize(h,1);
if ((h == 0) || (cleardenom(I[1]) != h))
{
    write#[1], "Failed - (Step 3)";
    setring r;
    return(0);
}

setring r1;

//Step 4:
poly h = imap(rh,h);
poly P = subst(h,x,1);
poly as = imap(rh,as);
poly an = subst(as,x,1);

ring ry = 0,(y,t),dp;
poly P = imap(r1,P);
poly an = imap(r1,an);
poly Q = diff(P,y) - t*an;
poly R1 = cleardenom(resultant(P,Q,y));

//Step 5:
ideal I = factorize(R1,1);
for (int i = 1; i <= size(I); i = i + 1)
{
    if (deg(I[i]) == 1)
    {
        write#[1], "Failed - (Step 5)";
        setring r;
    }
}

```



```

    return(0);
}
}

//Step 6:
number cn = leadcoef(R1);
poly R1n = R1 - lead(R1);
number cn1 = leadcoef(R1n);
number qn1 = absValue(cn1/cn);

if (qn1 == (n+1)*(n+1))
{
    write#[1], "Failed - (Step 6)";
    setring r;
    return(0);
}

//Step 7:
setring r1;
poly R2 = cleardenom(resultant(a,b,y));

//Step 8:
ideal I = factorize(R2,1);
if ((deg(R2) < n*n) || (cleardenom(I[1]) != R2))
{
    write#[1], "Failed - (Step 8)";
    setring r;
    return(0);
}

//Step 9:
poly Da = a * diff(a,x) + b * diff(a,y);
poly Db = a * diff(b,x) + b * diff(b,y);
poly W = b * Da - a * Db;

```

```

//Step 10:
h = W;
int gh = deg(h);
poly Dh;
while(1)
{
    Dh = a * diff(h,x) + b * diff(h,y);
    h = gcd(h,Dh);
    if (deg(h) == gh)
    {
        break;
    }
    else
    {
        gh = deg(h);
    }
}

if(h != 1)
{
    write(#[1], "Failed - (Step 10)");
    write(#[1], "Solução: ", h);
    setring r;
    return (1);
}

//Step 11:
write(#[1], "There are no algebraic solutions");
setring r;
return(-1);
}

```

Referências Bibliográficas

- [1] Darboux, G., “Mémoire sur les équations différentielles algébriques du I^o ordre et du premier degré”, *Bulletin de Sciences Mathématiques*, v. 1, n. 2, pp. 60-96, 123-144, 151-200, 1878.
- [2] Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*, 2 ed., New York, Dover, 1956.
- [3] Jordan, C., *Cours d'analyse de l'école polytechnic*, Volume III, 3 ed., Paris, Gauthier-Villars, 1915.
- [4] Prelle, M.J., Singer, M.F., “Elementary first integrals of differential equations”, *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 279, n. 1, pp. 215-229, 1983.
- [5] Landis, E.M., Petrovskiĭ, I.G., “On the number of limit cycles of the equation $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ where P and Q are polynomials of the second degree”, In: *American Mathematical Society Translations*, Series 2, Volume 10, American Mathematical Society, pp. 177-221, 1958.
- [6] Bernstein, J., Lunts, V., “On non-holonomic irreducible D-modules”, *Inventiones Mathematicae*, v. 94, n. 2, pp. 223-243, 1988.
- [7] Lins Neto, A., Sad, P., Scárdua, B., “On topological rigidity of projective foliations”, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, v. 126, n. 3, pp. 381-406, 1998.
- [8] Christopher, C.J., “Invariant algebraic curves and conditions for a centre”, *Proceedings of the Royal Society of Edimburgh, Section A*, v. 124, n. 6, pp. 1209-1229, 1994.
- [9] Coutinho, S.C., Ribeiro, B.F.M., “On holomorphic foliations without algebraic solutions”, *Experimental Mathematics*, v. 10, n. 4, pp. 529-536, 2001.
- [10] Coutinho, S.C., Schechter, L.M., “Algebraic solutions of holomorphic foliations: an algorithmic approach”, *Journal of Symbolic Computation*, v. 41, n. 5, pp. 603-618, 2006.

- [11] Schechter, L.M., *Soluções algébricas de folheações holomorfas: uma abordagem algorítmica*, Projeto Final do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação, UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.
- [12] Coutinho, S.C., “On the density of algebraic Pfaff equations without algebraic solutions: a constructive proof”, aceito para publicação em *Annales de l’Institut Fourier*.
- [13] Greuel, G.M., Pfister, G., Schönemann, H., SINGULAR 2.0.5, a computer algebra system for polynomial computations, <http://www.singular.uni-kl.de>, Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, 2005.
- [14] Gonçalves, A., *Introdução à álgebra*, 5 ed., Rio de Janeiro, IMPA, 1999.
- [15] Fulton, W., *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*, In: Mathematics Lecture Notes Series, 1 ed., New York-Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969.
- [16] Jouanolou, J.P., *Équations de Pfaff algébriques*, In: Lecture Notes in Mathematics, v. 708, 1 ed., Berlin, Springer, 1979.
- [17] Cerveau, D., Lins Neto, A., “Holomorphic foliations in $CP(2)$ having an invariant algebraic curve”, *Annales de l’Institut Fourier*, v. 41, n. 4, pp. 883-903, 1991.
- [18] Man, Y.K., MacCallum, M.A.H., “A rational approach to the Prellé-Singer algorithm”, *Journal of Symbolic Computation*, v. 24, n. 1, pp. 31-43, 1997.
- [19] Walcher, S., “On the Poincaré problem”, *Journal of Differential Equations*, v. 166, n. 1, pp. 51-78, 2000.
- [20] Suwa, T., *Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations*, In: Actualités Mathématiques, 1 ed., Paris, Hermann, 1998.
- [21] Brunella, M., *Birational geometry of foliations*, 1 ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2000.
- [22] Moulin-Ollagnier, J., “Simple Darboux points of polynomial planar vector fields”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 189, pp. 247-262, 2004.
- [23] Kreuzer, M., Robbiano, L., *Computational commutative algebra*, Volume 1, 1 ed., Berlin, Springer-Verlag, 2000.