CÁLCULO NUMÉRICO

Lista No. 7 – Gabarito

1. (a) Temos que $y(0) = \exp(-20 \cdot 0) = 1$, logo a condição inicial é satisfeita. Por outro lado
$$y'(x) = (\exp(-20x))' = \exp(-20x)(-20x)' = -20\exp(-20x) = -20y(x),$$
e a EDO é satisfeita!
(b) O método geral de R-K de 2a. ordem é dado como
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (1-w)k_1 + w\,k_2 \\ \quad k_1 = h\,f(x_n, y_n) \\ \quad k_2 = h\,f(x_n + \frac{h}{2w}, y_n + \frac{k_1}{2w}). \end{cases}$$
onde w é um parâmetro. Temos que
$$\begin{aligned} k_1 &= h\,f(x_n, y_n) = -20hy_n, \\ k_2 &= -20h(y_n + \tfrac{-20hy_n}{2w}) = -20hy_n(1 - \tfrac{10h}{w}) \\ y_{n+1} &= y_n + (1-w)k_1 + w\,k_2, \\ &= y_n + (1-w)(-20hy_n) + w(-20hy_n)(1 - \tfrac{10h}{w}) \\ &= y_n\left\{1 - 20h(1-w) - 20hw(1 - \tfrac{10h}{w})\right\} \\ &= y_n(1 - 20h + 200h^2) \\ &= y_nq(h), \qquad \text{onde } q(h) = 1 - 20h + 200h^2. \end{aligned}$$
Então
$$y_{n+1} = y_n\,q(h) = y_{n-1}\,q^2(h) = y_{n-2}\,q^3(h) = \cdots = y_0\,q^{n+1}(h).$$

2. (a) Quando $h = 0.25$, $y(5) \approx y_{20} = -3.000$.
Quando $h = 0.1$, $y(5) \approx y_{50} = -3.000$.
(b)
$$y'(x) = (-x^2 + 4x + 2)' = -2x + 4$$
E além disso $y(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 + 2 = 2$!!!
(c) A solução exata nos dá $y(5) = -5^2 + 4 \cdot 5 + 2 = 3$. As aproximações obtidas acima coincidem com o valor exato!!! Como o método de Euler aperfeiçoado é de 2a. ordem, as soluções polinomiais de grau ≤ 2 são obtidas de forma exata!
Neste caso como $f(x, y) = g(x) = 4 - 2x$ pelo m. de Euler aperfeiçoado temos que
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(hg(x_n) + hg(x_n + h)) = y_n + \frac{h}{2}(g(x_n) + g(x_n + h)) \\ &= y_n + \frac{h}{2}(4 - 2x_n + 4 - 2(x_n + h)) \\ &= y_n + h(4 - 2x_n) + \frac{h^2}{2}(-2), \qquad \text{como } y' = 4 - 2x \quad \Rightarrow y'' = -2 \\ &= y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2}y_n'' \\ &= y(x_{n+1}), \end{aligned}$$

a última igualdade é verdadeira já que todo polinômio de grau ≤ 2, coincide com o seu polinômio de Taylor de grau 2.

3. (a) Usamos o m. de R-K de 2a. ordem no caso $w = 1/2$ (M. Euler aperfeiçoado) com $y_0 = 20.0000$, $h = 2$ e $f(x, y) = -x/y$,e obtemos

$$\begin{aligned}
y(2) \approx y_1 &= y_0 + \tfrac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))] \\
&= y_0 + \tfrac{h}{2}[-\frac{x_0}{y_0} - \frac{x_0 + h}{y_0 - \frac{hx_0}{y_0}}] \\
&= 20 + \tfrac{2}{2}\left[-\frac{0}{20} - \frac{0+2}{20 - 2\frac{0}{20}}\right] \\
y(2) \approx y_1 &= 19.9000 \\
y(4) \approx y_2 &= 19.5964 \\
y(6) \approx y_3 &= 19.0796 \\
y(8) \approx y_4 &= 18.3316 \\
y(10) \approx y_5 &= 17.3224 \\
y(12) \approx y_6 &= 16.0029 \\
y(14) \approx y_7 &= 14.2877 \\
y(16) \approx y_8 &= 12.0100
\end{aligned}$$

(b) Usando as fórmulas do método

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),
\end{aligned}$$

obtemos

$$y(4) \approx y_1 = 19.5959, \quad y(8) \approx y_2 = 18.3302, \quad y(12) \approx y_3 = 15.9997, \quad y(16) \approx y_4 = 11.9980$$

4. Os resultados são mostrados na tabela

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
M. R-K 4^a o.	2.0000	2.4214	2.8918	3.4221	4.0255	4.7183
Erro	0	$2.76 \cdot 10^{-6}$	$6.74 \cdot 10^{-6}$	$1.234 \cdot 10^{-5}$	$2.010 \cdot 10^{-5}$	$3.069 \cdot 10^{-5}$
M. Euler	2.0000	2.4000	2.8400	3.3280	3.8736	4.4883
Erro	0	0.0214	0.0518	0.0941	0.1519	0.2300

5. (a) Seja $h = 0.5$. Usamos o m. de Euler aperfeiçoado:

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, \bar{y}_{n+1}) \qquad \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

para calcular y_1, y_2 e y_3.

$$\begin{aligned}
\bar{y}_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.5(1 \cdot 0^2 - 1^2) = 0.5 \\
y_1 &= y_0 + \tfrac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, \bar{y}_1) \\
&= 1 + .25[(1 \cdot 0^2 - 1^2) + (0.5 \cdot 0.5^2 - 0.5^2)) = 0.7188
\end{aligned}$$

de forma similar obtemos $y_2 = 0.6964$ e $y_3 = 1.0396$.

Agora $y(2) \approx y_4$ é calculado pelo M. Adams-Bashforth (explícito) de 4a. ordem:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{24}[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] \\
y_4 &= 1.0396 + \tfrac{0.5}{24}\big[55(1.0396 \cdot 1.5^2 - 1.0396^2) - 59(0.6964 \cdot 1^2 - 0.6964^2) \\
&\quad + 37(0.7188 \cdot 0.5^2 - 0.7188^2) - 9(1 \cdot 0^2 - 1^2)\big] \\
&= 2.1493
\end{aligned}$$

Para $h = 0.25$, pelo M. Euler aperfeiçoado obtemos $y_1 = 0.8105$, $y_2 = 0.7011$, $y_3 = 0.6569$ e o M. Adams-Bashforth $y_4 = 0.6758$, $y_5 = 0.7744$, $y_6 = 0.9951$, $y_7 = 1.4258$ e $y(2) \approx y_8 = 2.2099$.

(b) O M. de Adams-Moulton (ou Adams-Bashforth implícito) de 4a. ordem pode ser escrito como

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{24}[9f_{n+1} - 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}].$$

A principal desvantagem deste método é que por ser um método implícito, em geral, será preciso resolver uma equação não linear. Essa dificuldade pode ser resolvida combinando este método com um método explícito para formar um método de previsão-correção.

6. Vamos resolver no intervalo $[a, b]$ problemas de contorno do tipo

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \\ \quad a_1 y(a) + b_1 y'(a) = \gamma_1 \\ \quad a_2 y(b) + b_2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

Consideramos a discretização de $[a, b]$ com $n + 1$ pontos $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$ onde $h = (b - a)/n$. Representamos por y_i, y_i', y_i'', p_i, q_i e r_i os valores de $y(x_i)$, $y'(x_i)$, $y''(x_i)$, $p(x_i)$, $q(x_i)$ e $r(x_i)$, respectivamente.

Nos pontos interiores usamos as aproximações por diferenças finitas

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Substituindo na EDO obtemos

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = hp_i(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}) + h^2 q_i y_i + h^2 r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Nos extremos do intervalo usamos as aproximações para as primeiras derivadas

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}, \qquad y_n' \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Substituindo nas condições de contorno chegamos nas equações

$$\begin{aligned}(ha_1 - b_1)y_0 + b_1 y_1 &= h\gamma_1 \\ -b_2 y_{n-1} + (ha_2 + b_2)y_n &= h\gamma_2\end{aligned}$$

O sistema de equações lineares resultante pode ser reescrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} ha_1 - b_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 + \frac{hp_1}{2} & -(2 + h^2 q_1) & 1 - \frac{hp_1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 + \frac{hp_{n-1}}{2} & -(2 + h^2 q_{n-1}) & 1 - \frac{hp_{n-1}}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -b_2 & ha_2 + b_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\gamma_1 \\ h^2 r_1 \\ \vdots \\ h^2 r_{n-1} \\ h\gamma_2 \end{pmatrix}$$

(a) Como $h = 0.2$ temos $n = 5$, e usando que $p(x) = -2$, $q(x) = -1$, $r(x) = x$, $y_0 = y_5 = 0$ chegamos em

$$\begin{pmatrix} -1.9600 & 1.4000 & 0 & 0 \\ 0.6000 & -1.9600 & 1.4000 & 0 \\ 0 & 0.6000 & -1.9600 & 1.4000 \\ 0 & 0 & 0.6000 & -1.9600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0080 \\ 0.0160 \\ 0.0240 \\ 0.0320 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0486 \\ -0.0623 \\ -0.0550 \\ -0.0332 \end{pmatrix}$$

(b) Neste caso, usando que $p(x) = 3x$, $q(x) = -1$, $r(x) = x$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $\gamma_2 = 0$ e $y_0 = 0$ chegamos em

$$\begin{pmatrix} -1.9600 & 0.9400 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1200 & -1.9600 & 0.8800 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1800 & -1.9600 & 0.8200 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2400 & -1.9600 & 0.7600 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0080 \\ 0.0160 \\ 0.0240 \\ 0.0320 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0598 \\ -0.1161 \\ -0.1644 \\ -0.1965 \\ -0.1965 \end{pmatrix}$$