CÁLCULO NUMÉRICO - Lista No. 3a

Resolução de sistemas lineares: métodos diretos

Prof. Daniel G. Alfaro Vigo

As questões 7, 8 e 9 são opcionais.

1. Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método de eliminação de Gauss (sem pivoteamento):

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

2. Resolva os sistemas lineares abaixo utilizando o método de eliminação de Gauss (sem pivoteamento), fazendo arredondamento com 3 casas decimais:

a)

$$\begin{cases} 3.03x_1 - 12.1x_2 + 14.0x_3 = -119 \\ -3.03x_1 + 12.1x_2 - 7.00x_3 = 120 \\ 6.11x_1 - 14.2x_2 + 21.0x_3 = -139 \end{cases}$$

Solução exata: $(x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = \frac{1}{7})$

b)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = -1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução exata: $(x_1 = 54, x_2 = -264, x_3 = 240)$

c)

$$\begin{cases} 1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + 1.00x_4 = 1.12 \\ 14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - 1.00x_4 = 3.44 \\ 100x_2 - 99.9x_3 + 1.00x_4 = 2.15 \\ 15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - 1.00x_4 = 4.16 \end{cases}$$

Solução exata: $(x_1 = 0.17682530, x_2 = 0.01269269, x_3 = -0.02065405, x_4 = -1.18260870)$

3. Faça o exercício anterior, usando a estratégia de pivoteamento parcial.

4. Repeta o exercício anterior, usando a estratégia de pivoteamento completo. Compare os resultados obtidos com aqueles dos exercícios anteriores.

5. Faça a fatoração LU (usando o método de eliminação de Gauss) das seguintes matrices:
a)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$
b)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1.5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -4.5 & 5 \end{bmatrix}$$
c)
$$A = \begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$$

6. Resolva os sistemas lineares $Ax = b$, para os seguintes vetores de constantes b, usando as matrices A do exercício anterior e suas decomposições LU:
a)
$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$
b)
$$b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
c)
$$b = \begin{pmatrix} 0.5000 \\ -5.3564 \\ 0.7654 \\ -2.6719 \end{pmatrix}$$

7. O cálculo do determinante de matrizes quadradas pode ser feito usando o método de eliminação de Gauss.
a) deduza esse processo;
b) aplique-o no cálculo do determinante das matrizes dos sistemas dos exercícios (1) e (2).

8. Considere o sistema linear $Ax = b$, com matriz de $n \times n$ não singular. Determine a quantidade de operações de multiplicação/divisão (como função de n) realizadas:
a) no processo de fatoração LU;
b) na resolução do sistema, usando as matrices L e U
c) na resolução do sistema, usando a matriz inversa A^{-1}.

9. Seja A uma matriz de $n \times n$ simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2 \dots, n$). Prove que se o processo de eliminação de Gauss pode ser realizado sem troca de linhas, então $A = LDL^t$, onde a matriz L é triangular inferior com diagonal unitária, D é uma matriz diagonal com os

elementos $a_{kk}^{(k-1)}$ na diagonal, e L^t representa a matriz transposta de L (em geral se c_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ representam os elementos da matriz C, então os elementos $\tilde{c}_{ij}$ da matriz transposta C^t, satisfazem $\tilde{c}_{ij} = c_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$).