CÁLCULO NUMÉRICO - Lista No. 2

Zeros reais de funções reais

Prof. Daniel G. Alfaro Vigo

1. Localize gráficamente os zeros das funções a seguir:
   a) $f(x) = 4\cos(x) - \exp(2x)$
   b) $f(x) = x/2 - \tan(x)$
   c) $f(x) = 1 - \ln(x)$
   d) $f(x) = 2^x - 3x$
   e) $f(x) = x^3 + x - 1000$

2. Seja $f(x) = x(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-2)$. Para que zero de $f(x)$ o Método da Bissecção vai convergir quando for aplicado nos seguintes intervalos?
   a) [-1.5, 2.5]
   b) [-0.5, 2.4]
   c) [-0.5, 3]
   d) [-3, -0.5]

3. Encontre o número de iterações necessário para obter, uma aproximação com precisão de 10^{-3}; para a solução da equação $x^3 + x - 4 = 0$ que se encontra no intervalo $[1, 2]$ pelo Método da Bissecção. Encontre um valor aproximado para a raiz com esse grau de precisão.

4. Para cada uma das equações a seguir, determine uma função de iteração $\varphi(x)$ e um intervalo $[a, b]$ no qual as iterações do Método do Ponto Fixo convergirão para uma solução positiva da equação:
   a) $3x^2 - \exp(x) = 0$
   b) $x - \cos(x) = 0$
   Encontre as soluções com precisão de 10^{-5}.

5. Suponha que $a > 0$. Certifique-se que as seguintes funções de iteração:
   a) $\varphi_1(x) = \frac{a}{x}$, e
   b) $\varphi_2(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$,
   possuem o ponto fixo $\xi = \sqrt{a}$. Qual dessas funções você utilizaria para obter uma aproximação de $\sqrt{a}$ pelo Método do Ponto Fixo? Explique sua escolha.

6. Use os métodos da bissecção, ponto fixo, Newton-Raphson e secante (programados para rodar em um software) para obter a menor raiz positiva das equações a seguir com precisão 10^{-7}, (se usar apenas uma calculadora, faça precisão igual a 10^{-3}).
   a) $x/2 - \tan(x) = 0$;
   b) $2\cos(x) - \exp(x)/2 = 0$;
   c) $x^5 - 6 = 0$;
   d) $x\exp(x) - \exp(-3) = 0$

Faça uma tabela para apresentar uma comparação entre os métodos, mostrando para cada teste o número de iterações, valor de $f(x)$ no último ponto. Para efeitos de comparação: se a aproximação inicial para a bissecção for o intervalo $[a, b]$ use $x_0 = a$ como chute inicial para o Método de Newton-Raphson e $x_0 = a$ e $x_1 = b$ como chutes iniciais para o Método da Secante.

7. Seja $f(x) = x^2 - 6$. Com $x_0 = 3$ e $x_1 = 2$; ache x_3.
   a) Use o Método da Secante,
   b) Use o Método de Newton-Raphson,
   c) Que método dá um resultado mais próximo de $\sqrt{6}$?

8. O valor de π pode ser obtido através da resolução das seguintes equações: $\sin(x) = 0$ e $\cos(x) + 1 = 0$. Aplique o Método de Newton-Raphson com $x_0 = 3$ e precisão 10^{-4} em cada caso e compare os resultados. Explique a diferença no número de iterações realizadas para atingir a precisão.

9. Duas escadas de comprimentos L_1 e L_2, se cruzam em um beco com largura W. Cada escada se estende da base de uma das paredes até um ponto na parede oposta. As escadas se cruzam em uma altura H acima do pavimento. Encontre W sendo dados os valores $L_1 = 20m$, $L_2 = 30m$ e $H = 8m$.

   Dica: Escrever uma equação para W e resolvê-la aproximadamente.

10. Demonstre que: sob as hipóteses do Teorema de convergência do Método do Ponto Fixo, se $\varphi'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então a sequência $\{x_k\}$ é oscilante em torno da raíz ξ.

    Dica: Use o teorema do valor médio.

11. Prove as seguintes afirmações:
    a) Seja ξ uma raiz da equação $f(x) = 0$ e considere que as hipóteses do Teorema de convergência do Método de Newton-Raphson são satisfeitas. Suponha que $f''(\xi) = 0$ e $f'''(x)$ é contínua no intervalo, então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método tem, em geral, ordem de convergência $p = 3$.

    Dica: Use a fórmula de Taylor até ordem 3 para $f(\xi)$ e até primeira ordem para $f''(x_k)$.

    b) Seja que $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ são funções contínuas num intervalo $[a, b]$. Seja ξ ($a < \xi < b$) uma raiz das equações $f(x) = 0$ e $f'(x) = 0$ (ou seja $f(\xi) = f'(\xi) = 0$) tal que $f''(\xi) \neq 0$. Então o Método de Newton-Raphson gera uma sequência que converge para ξ quando x_0 está suficientemente perto de ξ, e em geral, a ordem de convergência é linear.

    Dica: Siga a mesma idéia que na prova apresentada na aula para o Teorema de convergência do Método do ponto fixo. Para isso use a fórmula de Taylor até segunda ordem para $f(\xi)$ e até primeira ordem para $f'(x_k)$, e prove que existem $M' < 1$ e $\delta > 0$ tais que $|\xi - x_{k+1}| \leq M'|\xi - x_k|$ se $\xi - \delta \leq x_k \leq \xi + \delta$.