CÁLCULO NUMÉRICO

Lista No. 2 – Gabarito

1. *a)* $[-2k\pi, -(4k-1)\pi/2]$, $[-(4k+1)\pi/2, -2k\pi]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
   b) $[(k-1/2)\pi, (k+1/2)\pi]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
   c) $[2, 3]$
   d) $[0, 1]$, $[3; 4]$
   e) $[2, 3]$

2. *a)* raiz $\xi = 0$
   b) raiz $\xi = 0$
   c) raiz $\xi = 2$
   d) raiz $\xi = -2$

3. Número de Iterações $\geq 1 + 3/\log_{10} 2 \approx 11$. Raiz aproximada $x_{11} = 1.3779296875$

4. *a)* $[0, 1]$: $\varphi(x) = \exp(x/2)/\sqrt{3}$, raiz aproximada $x_{15} = 0.910003$
   $[3, 4] : \varphi(x) = \log(3x^2)$, raiz aproximada $x_{19} = 3.73307$
   b) $[0,\ \pi/4]$: $\varphi(x) = \cos(x)$, raiz aproximada $x_{28} = 0.739082$.

5. *a)* $\varphi_1(\xi) = \varphi_1(\sqrt{a}) = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} = \xi$, e
   b) $\varphi_2(\xi) = \varphi_2(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}) = \sqrt{a} = \xi$.
   Escolha: $\varphi_2(x)$. Note que $\varphi_2'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2})$, logo $\varphi_2'(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{(\sqrt{a})^2}) = 0$. Por outro lado, $\varphi_1'(x) = -\frac{a}{x^2}$ e $|\varphi_1'(\xi)| = |-\frac{a}{(\sqrt{a})^2})| = 1$. Portanto usando a função $\varphi_2(x)$ a convergência está garantida se começamos com uma boa aproximação inicial, esta função de iteração corresponde ao método de Newton-Raphson, pelo que teremos uma convergência de ordem quadrática. Usando a outra função a convergência não está garantida. De fato, nesse caso se $x_0 > 0$ temos a sequência

$$x_k = \begin{cases} x_0, & k \text{ par} \\ \frac{a}{x_0}, & k \text{ ímpar}, \end{cases}$$

   que converge se e somente se $x_0 = \sqrt{a}$.

6. *a)* $f(x) = x/2 - \tan(x) = 0$

–	M. bissecção	M. P. Fixo	M. Newton	M. secante
$\varphi(x)$	–	$\pi + \tan^{-1}(x/2)$	–	–
$[a, b]$ ou x_0	$[\pi,\ 4.7]$	$x_0 = \pi$	$x_0 = \pi$	$x_0 = \pi, x_1 = 4.7$
N. iterações	25	8	Não converge	10 (raiz errada)
x_n	4.274782275	4.274782265	–	$1.246564078 \times 10^{-18}$
$f(x_n)$	-1.8×10^{-8}	3.2×10^{-8}	–	-6.2×10^{-8}

   b) $f(x) = 2\cos(x) - \exp(x)/2 = 0$

–	M. bissecção	M. P. Fixo	M. Newton	M. secante
$\varphi(x)$	–	$\cos^{-1}(\exp(x)/4)$	–	–
$[a,b]$ ou x_0	$[0,\ \pi/2]$	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$	$x_0 = 0, x_1 = \pi/2$
N. iterações	25	70	7	9
x_n	0.9047882888	0.9047881831	0.9047882179	0.9047882179
$f(x_n)$	-2×10^{-7}	9.8×10^{-8}	0	1.1×10^{-15}

c) $f(x) = x^5 - 6 = 0$

–	M. bissecção	M. P. Fixo	M. Newton	M. secante
$\varphi(x)$	–	–	–	–
$[a,b]$ ou x_0	$[1;2]$	$x_0 = 1$	$x_0 = 1$	$x_0 = 1, x_1 = 2$
N. iterações	25	–	7	9
x_n	1.430969059	–	1.430969081	1.430969081
$f(x_n)$	-4.5×10^{-7}	–	0.0	0.0

d) $f(x) = x\exp(x) - \exp(-3) = 0$

–	M. bissecção	M. P. Fixo	M. Newton	M. secante
$\varphi(x)$	–	$\exp\{-(x+3)\}$	–	–
$[a,b]$ ou x_0	$[0;1]$	$x_0 = 0$	$x_0 = 10$	$x_0 = 0, x_1 = 1$
N. iterações	25	6	4	6
x_n	0.04747849703	0.04747849047	0.04747849102	0.04747849102
$f(x_n)$	6.6×10^{-9}	-6.1×10^{-10}	0.0	4.6×10^{-14}

7. *a)* M. Secante: com $x_0 = 3$ e $x_1 = 2$, $x_3 = 2.4$ e $|x_3 - \sqrt{6}| \approx 0.0495$.
   b) M. Newton-Raphson: com $x_0 = 3$, $x_3 = 2.45$ e $|x_3 - \sqrt{6}| \approx 0.000510$.
   c) O Método de Newton-Raphson.

8. Método de Newton-Raphson

$f(x) = 0$	N. iterações	x_0	x_n	$\lvert\pi - x_n\rvert$
$\sin(x)$	3	3.0	3.141592653589793	0.0
$\cos(x) + 1$	11	3.0	3.141523670603724	0.000068983

   No segundo caso, o número de iterações é maior pois para $f(x) = \cos(x) + 1$ temos que $f'(\pi) = -\sin(\pi) = 0$ e então a convergência não pode ser quadrática, ou seja é mais lenta que no primeiro caso. Além disso, como $f''(\pi) = -\cos(\pi) = 1 \neq 0$, temos convergência apenas linear! (Veja o exercício 11.)

9. Equação para W:
$$\frac{H}{\sqrt{L_1^2 - W^2}} + \frac{H}{\sqrt{L_2^2 - W^2}} - 1 = 0.$$
   Usando o método de Newton-Raphson com chute inicial $W_0 = 15$ obtemos que $W \approx 16.21\,m$